

2) Soit $O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R})$. Alors $\text{rang } O - I_4 = 3$ et

$$O = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \text{ réflexions orthogonales}}.$$

3) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors $I_n + A$ est inversible et $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

V Réduction des endomorphismes autoadjoints

V.1 Matrices symétriques

V.1.1 Réduction

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PD^tP$.

Lemme. A possède une valeur propre réelle.

Démo. Par récurrence sur $n \geq 0$.

Exemples.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = PD^tP$ où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \diagdown & \diagup & \\ 1 & & & 1 \\ & \diagup & \diagdown & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $C = PD^tP$ où $P = \left(\sin \frac{ij\pi}{n+1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

et $D = \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\pi}{n+1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 \cos \frac{n\pi}{n+1} & \end{pmatrix}$.

En effet, $\forall x, \sin(n+1)x = 2^n \sin x \chi_C(\cos x)$.

Exercices.

1. Si $\lambda \neq \mu$, alors $\ker(A - \lambda) \perp \ker(A - \mu)$.
2. Montrer que la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

V.1.2 Signature.

Définition. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . On note $\text{sign}(A) = (p, q)$ la signature de A où

$$p = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i > 0\}|$$

$$q = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i < 0\}|;$$

c'est la *signature* de A .

Exercices.

- 1) $p + q = \text{rang}(A)$.
- 2) $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1)$.

V.1.3 Min-max.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Alors

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x = \max_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = n-k+1}} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x .$$

Exercices.

- 1) Avec les notations du théorème, vérifier que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_1(A + B) \leq \lambda_n(A + B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
- 2) Démontrer le *critère de Sylvester avec les mineurs principaux* à l'aide du théorème ci-dessus.

V.2 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème de Riesz. Soit E un espace euclidien. $\forall \lambda \in E^*, \exists x_\lambda \in E, \lambda = \langle x_\lambda, \cdot \rangle$. *Démo.* L'application $E \rightarrow E^*, x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ est injective donc bijective car $\dim E = \dim E^*$.

Définitions. Soit E un espace euclidien. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle .$$

On dit que f est *autoadjoint* si $f^* = f$, *orthogonal* si $f^* = f^{-1}$, *normal* si $ff^* = f^*f$.