VII Géométrie affine

VII.1 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$

Définition. On dit que $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine si $\mathcal{F} = \varnothing$ ou $\mathcal{F} = x + F = \{x + u \,:\, u \in F\}$ pour un certain $x \in \mathcal{F}$ et un $F \leqslant \mathbb{R}^n$.

Un sous-espace affine non vide de dimension O est un point. Un sous-espace affine de dimension 1 est une *droite*.

Exercices.

1) Trouver l'équation de la droite qui passe par les points $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ du plan affine $\mathbb{R}^2$.

2) Trouver les équations de la droite qui passe par les points $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ de l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

3) Soient $d_i = (a_i x + b_i y + c_i = 0)$, $i = 1, 2, 3$ trois droites du plan affine $\mathbb{R}^2$ avec $^\forall i = 1, 2, 3$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$. Montrer que $d_1 \cap d_2 \cap d_3 \neq \varnothing \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

4) Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine $\Leftrightarrow$ $^\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $^\forall x, y \in \mathcal{F}$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{F}$.

VII.2 Espaces affines

Définition. Un espace affine réel est un ensemble $\mathscr{E}$ avec une action simplement transitive d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E *c-à-d* une application

$$E \times \mathscr{E} \to \mathscr{E}$$

telle que

(i) $\forall x \in \mathcal{E},\ x + \overrightarrow{0} = x$.

(ii) $\forall x \in \mathcal{E}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\ (x + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = x + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.

(iii) $\forall x, y \in \mathcal{E},\ \exists\,! \overrightarrow{u} \in E,\ x + \overrightarrow{u} = y$.

La *dimension* de $\mathcal{E}$ est $\dim \mathcal{E} = \dim E$.

Notation. Si $x + \overrightarrow{u} = y$, on note $\overrightarrow{xy} := \overrightarrow{u}$. On note parfois $E = \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Relation de Chasles. $\forall x, y, z \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$.

Exemple. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^n$ et l'addition usuelle.

Définition équivalente. Un ensemble $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{R}-$espace affine s'il existe un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E et une application

$$\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E,\ (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$$

telle que :

$$\forall x \in \mathscr{E},\ \forall \overrightarrow{u} \in E,\ \exists\,! y \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} \text{ et } \forall x, y, z \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$$

Définition. Sous-espaces affines. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}-$espace affine. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* si $\mathcal{F} \neq \varnothing$ ou $\exists\ x \in \mathcal{F},\ F \leqslant \overrightarrow{\mathcal{E}},\ \mathcal{F} = x + F$. ($\Leftrightarrow \{\overrightarrow{ab}\ :\ a, b \in \mathcal{F}\} \leqslant \overrightarrow{\mathcal{E}}$).

Sous-espaces engendrés. Soit $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{E}$. Soit $x_0 \in X$. On note $\mathrm{Aff}(X) = x_0 + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{x_0x}\ :\ x \in X\}$. C'est le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant X. Et c'est indépendant du choix de $x_0 \in X$.

Définitions.Affinement indépendants. On dit que $A_1, ..., A_N \in \mathcal{E}$ sont $\mathbb{R}-$*affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, ..., \overrightarrow{A_1A_N}$ sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendants.

Repère. Un repère de $\mathcal{E}$ est la donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Remarque. Dans ce cas, $\forall x \in \mathcal{E}, \exists\,!(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x = O + x_1\overrightarrow{u_1} + + ... + x_n\overrightarrow{u_n}$.

Exercice. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{A_1A_2}, ..., \overrightarrow{A_1A_N}$ sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendants $\Leftrightarrow$ $^\forall i$, $\overrightarrow{A_iA_j}$, $1 \leqslant j \neq i \leqslant N$ sont aussi $\mathbb{R}-$linéairement indépendants.

Barycentres.

Si $x, y \in \mathscr{E}$, espace affine, alors si $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application

$$\mathscr{E} \to \mathscr{E},\ M \mapsto M + \lambda\vec{M}x + (1-\lambda)\vec{M}y$$

est constante. On note $P = \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathscr{E}$ le point tel que :

$$^\forall M \in \mathscr{E},\ M + \lambda\vec{M}x + (1-\lambda)\vec{M}y = P.$$

VII.3 Transformations affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel. On notera $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel associé.

Définition. Une *transformation affine* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application telle qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{T} \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ tels que

$$^\forall M \in \mathcal{E},\ T(M) = T(A) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{AM})\ .$$

Remarque. Dans ce cas, $^\forall M, N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{T(M)T(N)} = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{MN})$.

Exemples. Les translations $t_{\overrightarrow{u}} : x \mapsto x + \overrightarrow{u}$, les homothéties $h_{A,\lambda} : x \mapsto A + \lambda\overrightarrow{Ax}$, $A \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des applications affines.

Propriétés.

a) Si S, T sont des transformations affines, alors $S \circ T$ aussi et $\overrightarrow{S \circ T} = \overrightarrow{S}\,\overrightarrow{T}$.

b) Si T est une transformation affine bijective, alors sa réciproque T^{-1} aussi.

c) $^\forall T$ transformation affine, $^\forall O \in \mathcal{E}$, $\exists\,!\,\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\exists\,!\,T'$ transformation affine, $T'(O) = O$ et $T = t_{\overrightarrow{u}} \circ T'$.

Définition. Le *groupe affine de* $\mathcal{E}$, noté $GA(\mathcal{E})$, est le groupe des bijections affines $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

Exercices.

1) Déterminer $GA(\mathbb{R})$.

2) Soit $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\begin{aligned} &T \text{ affine} \\ &\Leftrightarrow {}^\forall \lambda \in \mathbb{R},\ {}^\forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) \\ &\Leftrightarrow {}^\forall 0 < \lambda < 1,\ {}^\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y)\ . \end{aligned}$$

VII.4 Isométries affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, *c-à-d* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une espace euclidien.

Théorème. Soit $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E},\ ||\overrightarrow{T(M)T(N)}|| = ||MN|| \ .$$

Alors T est une transformation affine bijective.

On dit que T est une *isométrie affine.*