

Licence de mathématiques

L2, algèbre 4

examen de rattrapage

mercredi 2 juillet 2025

durée 1H30*CORRIGÉ.***Exercice 1**

Donner la définition d'un espace affine et donner un exemple. Un espace affine réel est un couple $(\mathcal{E}, E)$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble, E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriels tels qu'il existe une application :

$$\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}, (x, u) \mapsto x + u$$

qui vérifie :

- (i) $\forall x \in \mathcal{E}, \forall u, v \in E, (x + u) + v = x + (u + v).$
- (ii) $\forall x \in \mathcal{E}, x + 0 = x.$
- (iii) $\forall x, y \in \mathcal{E}, \exists ! u \in E, x + u = y.$

Notation si $x + u = y$, on note $u = \overrightarrow{xy}$. Exemple. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n = E$ avec l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, u) \mapsto x + u$, l'addition usuelle de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 Soit la matrice réelle $R = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

- a) Montrer que R est une matrice de rotation. Déterminer son axe et son angle.

Les colonnes sont de norme 1 car :

$$\frac{2^2 + 3^2 + 6^2}{7^2} = 1$$

et deux à deux orthogonales car :

$$2.3 + 3.(-6) + 6.2 = 3.6 - 6.2 + 2.(-3) = 2.6 + 3.2 + 6.(-3) = 0.$$

Donc R est une matrice orthogonale.

De plus,

$$\det R = \frac{1}{7^3} (2.(-6).(-3) + 3.2.6 + 6.2.3 - 6.(-6).6 - 2.2.2 + 3.3.3) = 1.$$

Donc R est une matrice de rotation.

Pour déterminer l'axe $\ker(R - I_3)$, on résout :

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, Rx = x &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 7x_1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 7x_2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ -56x_2 + 28x_3 = 0 & 3L_1 + 5L_2 \\ 28x_2 + 14x_3 = 0 & 6L_1 + 5L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_3, x_2 = \frac{x_3}{2}. \end{aligned}$$

Donc l'axe de R est la droite $\mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus si θ est l'angle de la rotation, $\text{Tr} R = 1 + 2 \cos \theta = \frac{2-6-3}{7} = -1 \Rightarrow \cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi \bmod 2\pi$. Donc R est une rotation d'angle π .

- b) Déterminer P une matrice orthogonale telle que : $R = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On a déjà trouvé $\ker R - I_3$. Reste à déterminer $\ker R + I_3$.

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On résout

$$Rx = -x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -7x_1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -7x_2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -3x_1 - 2x_3.$$

$$\text{Donc } \ker R + I_3 = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons donc $v_1 = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{2\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$. Alors la matrice $P = (v_1|v_2|v_3)$ est orthogonale, $Rv_1 = v_1$, $Rv_2 = -v_2$ et $v_3 \in v_1^\perp = \ker(R - I_3)^\perp = \ker(R + I_3) \Rightarrow Rv_3 = -v_3$.

Donc $R = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{-7}{2\sqrt{35}} \end{pmatrix}$ orthogonale (de déterminant 1).

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ l'espace des polynômes réels de degrés ≤ 2 . Pour tous $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

a) Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien. Quelle est sa dimension ?

L'application $E \times E \rightarrow \mathbb{R} \ (P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire. En effet, c'est clairement bilinéaire et si $P \neq 0$, alors $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(x)dx > 0$ car P est positive, continue et non nulle sur $[0, 1]$. Comme E est de dimension 3 (car $(1, X, X^2)$ est une base de E), E est de dimension finie. C'est donc un espace euclidien pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

b) Montrer que l'application linéaire

$$E \rightarrow E, P(X) \mapsto P(1 - X)$$

est un endomorphisme autoadjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Posons $T : P(X) \mapsto P(1 - X)$. C'est bien une application linéaire de E dans E (le degré ne change pas!). Soient $P, Q \in E$, alors on a :

$$\begin{aligned} \langle T(P), Q \rangle &= \int_0^1 P(1 - x)Q(x)dx \\ &= \int_0^1 P(x)Q(1 - x)dx \end{aligned}$$

en faisant le changement de variables $x \mapsto 1 - x$,

$$= \langle P, T(Q) \rangle.$$

Donc $T^* = T$ et T est auto-adjoint.

- c) Soit F le sous-espace de E engendré par les polynômes X, X^2 . Déterminer une base orthonormée de F .

On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base (X, X^2) de F . Soit $v_1 = X$. Soit

$$\begin{aligned} v_2 &= X^2 - \frac{\langle X^2, X \rangle}{\langle X, X \rangle} X \\ &= X^2 - \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} X \\ &= X^2 - \frac{3}{4} X. \end{aligned}$$

La base (v_1, v_2) est orthogonale. On obtient une base orthonormale en « normalisant » : soient

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ &= \frac{X}{\sqrt{\int_0^1 x^2 dx}} \\ &= \sqrt{3} X, \\ v'_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} \\ &= \frac{X^2 - \frac{3}{4} X}{\sqrt{\int_0^1 (x^2 - \frac{3}{4} x)^2 dx}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - \frac{3}{4} x)^2 dx &= \int_0^1 (x^4 - \frac{3}{2} x^3 + \frac{9}{16} x^2) dx \\ &= \frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} \\ &= \frac{1}{80} \end{aligned}$$

donc

$$v'_2 = \frac{1}{4\sqrt{5}} (X^2 - \frac{3}{4} X).$$

La base (v'_1, v'_2) de F est orthonormale.

- d) Montrer que le polynôme $P = -\frac{10}{3}X^2 + 4X$ est le projeté orthogonal du polynôme constant 1 sur le sous-espace F , pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Justifier sa réponse. Il suffit de vérifier que $1 - P \in F^\perp$. Or,

$$\begin{aligned}\langle 1 - P, X \rangle &= \int_0^1 x dx + \frac{10}{3} \int_0^1 x^3 dx - 4 \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{4}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle 1 - P, X^2 \rangle &= \int_0^1 x^2 dx + \frac{10}{3} \int_0^1 x^4 dx - 4 \int_0^1 x^3 dx \\ &= \frac{1}{3} + \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $1 - P \in F^\perp$ et P est bien le projeté orthogonal de 1 sur F .

- e) Déterminer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^2 dx.$$

On a :

$$\begin{aligned}\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^2 dx &= \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (1 - ax - bx^2)^2 dx \\ &= \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \|1 - aX - bX^2\|^2,\end{aligned}$$

si on note $\forall P \in E, \|P\|^2 = \langle P, P \rangle$,

$$\begin{aligned}&= \inf_{P \in F} \|1 - P\|^2 \\ &= d(1, F)^2,\end{aligned}$$

avec les notations du cours,

$$= \|1 - p_F(1)\|^2,$$

où $p_F(1)$ est le projeté orthogonal de 1 sur F (d'après le cours),

$$= \|1 - 4X + \frac{10}{3}X^2\|^2,$$

d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (1 - 4x + \frac{10}{3}x^2)^2 dx \\ &= \int_0^1 dx + 16 \int_0^1 x^2 dx + \frac{100}{9} \int_0^1 x^4 dx - 8 \int_0^1 x dx + \frac{20}{3} \int_0^1 x^2 dx - \frac{80}{3} \int_0^1 x^3 dx \\ &= 1 + \frac{16}{3} + \frac{20}{9} - 4 + \frac{20}{9} - \frac{20}{3} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour tous $A, B \in E$, on note $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$.

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement bilinéaire. Si $A, B \in E$, alors $\langle B, A \rangle = \text{Tr}^t BA = \text{Tr}^t({}^tBA) = \text{Tr}^t AB = \langle A, B \rangle$. Donc c'est symétrique.

Si $0 \neq A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors :

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Tr} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & * \\ c^2 + d^2 & \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$$

car $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Donc on a bien un produit scalaire.

- b) Soit $\mathcal{S} \leq E$ le sous-espace des matrices symétriques réelles. Dans E , déterminer une base de l'orthogonal $\mathcal{S}^\perp$ pour ce produit scalaire. Comme $\mathcal{S}$ est engendré par les matrices

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^\perp \Leftrightarrow \\ \langle x, A \rangle &= \langle y, A \rangle = \langle z, A \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a = 0, \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = d = 0, \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b+c = 0 \\ \Leftrightarrow A &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathcal{S}^\perp$.