Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On considère G le sous-espace vectoriel de E formé des quadruplets (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 - x_2 + x_4 = 0.$$

1. Déterminer une base orthonormée de G.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer la distance de x à G.

Corrigé :

1. On a :

$$\begin{aligned} G &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_4 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_1 + x_2, x_2 - x_1) \ ; \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= x_1(1, 0, 1, -1) + x_2(0, 1, 1, 1), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\underbrace{(1, 0, 1, -1)}_{\boldsymbol{v}_1}, \underbrace{(0, 1, 1, 1)}_{\boldsymbol{v}_2}\right) \end{aligned}$$

   C'est claire que v_1, v_2 sont linéairement independent donc la famille form une base pour G. Notons aussi que

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0$$

   Donc $\mathcal{B}_0 = \left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}, \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\right)$ est une base orthonormée où

$$\|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{3}$$

2. Projection orthogonale P_G sur G où $\mathcal{B}_0 = \left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}, \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\right)$ est une base orthonormée pour G.

   Pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$P(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1 \rangle \boldsymbol{w}_1 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_2 \rangle \boldsymbol{w}_2$$

   où $\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$ et $\boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}$.
   Plus explicitement pour $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 \\ &= \frac{1}{3}(x_1 + x_3 - x_4)(1, 0, 1, -1) + \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4)(0, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\left((x_1+x_3-x_4),\ x_2+x_3+x_4,\ x_1+x_2+2x_3,\ -x_1+x_2+2x_4\right)$$

Ainsi :

$$[P_G] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Distance de x à G :
   Soit $\boldsymbol{x} = (1,1,1,1)$.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, G) & = & \|\boldsymbol{x} - P_G(\boldsymbol{x})\| \\ & = & \left\|(1,1,1,1) - \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\| \\ & = & \left\|\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\| \\ & = & \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{array}$$

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien, et soient u, v deux endomorphismes auto-adjoints de E.

1. Démontrer que $\ker(u) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u) = E$.
2. Démontrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Corrigé :

1. Montrer que $\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = E$.
   Soit $x \in \ker(u)$, pour tout $y \in \operatorname{Im}(u)$ (alors $\exists z \in E$, tel que $u(z) = y$) on a

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z)\rangle = \langle u(x), z\rangle = \langle 0, z\rangle = 0$$

   Donc $x \in \operatorname{Im}(u)^\perp$, ainsi $\ker(u) \subset \operatorname{Im}(u)^\perp$. Puisque u est auto-adjoint, on a aussi $\operatorname{Im}(u)^\perp \subset \ker(u)$ donc $\ker(u) = \operatorname{Im}(u)^\perp$. E espace euclidien, on a donc $\ker(u) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u) = E$.
2. $u \circ v$ auto-adjoint $\Leftrightarrow u \circ v = v \circ u$

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, (u\circ v)(y)\rangle = \langle u(x), v(y)\rangle = \langle v(x), u(y)\rangle = \langle (v \circ u)(x), y\rangle$$

   (car $u^* = u$, $v^* = v$)
   De plus, on a :

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^* = v \circ u$$

   Donc $(u \circ v)$ est auto-adjoint $\Leftrightarrow u \circ v = v \circ u$.

Exercice 3. Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver une matrice orthogonale $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que

$$A = PD\,{}^tP.$$

Corrigé : La matrice A est symétrique, donc par le théorème spectral, A est diagonalisable via une matrice orthogonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons que $\mathrm{Rang}(A - 3I) = 1 < 3$ où $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Donc 3 est une valeur propre de A. Par le théorème du rang le multiplicité géométrique de 3 est $\dim\ker(A-3I) = 2 = 3-1 = \dim\mathbb{R}^3 - \mathrm{Rang}(A-3I)$.
De plus :

$$E_3 = \ker(A - 3I) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0\big\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Notons aussi que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à -3, donc on a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi -3 est une valeur propre avec vecteur propr

de A.
Puisque : $\dim\mathbb{R}^3 = 3 = \dim\ker(A - 3I) + \dim\ker(A + 3I)$, $\mathrm{spect}(A) = \{3, -3\}$.

$$E_3 = \mathrm{Vect}\left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad E_{-3} = \mathrm{Vect}\left(\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Comme $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \neq 0$, on applique le Gram-Schmidt orthogonalisation sur (v_1, v_2) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - \tfrac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle}\boldsymbol{u}_1 = (0, 1, -1) - \tfrac{1}{2}(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On normalise pour obtenir une base orthonormée :

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Matrice de passage orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien réel E, donc u est diagonalisable. On suppose que $\mathrm{tr}(u) = 0$, c'est-à-dire que la somme de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) est nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

Corrigé : u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de E constituée de vecteurs propres. Soit $\dim E = n$, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres, on a $\lambda_i \in \mathbb{R}$ telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Soit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i \neq 0.$$

Alors :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Puisque $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ orthonomée, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, on a :

$$\langle u(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(u) = 0$$

Ainsi, il existe $x \neq 0$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension n et u, v deux vecteurs orthogonaux non-nuls de E. On définit l'endomorphisme f de E par $f(x) = x + \langle x, v \rangle u$.

1. Démontrer que $\ker(f - \mathrm{Id})$ est de dimension $n-1$ et déterminer $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. En déduire que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ est contenu dans $\ker(f - \mathrm{Id})$.
2. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   où α est un réel non nul.
4. L'endomorphisme f est-il auto-adjoint ?

Corrigé :

1. • Notons que on a $f(u) = u + \langle u, v\rangle u = u$ car $\langle u, v\rangle = 0$. Plus généralement, pour tout $x \in \mathrm{Vect}(v)^\perp$,

$$f(x) = x + \langle x, v\rangle u = x.$$

   Donc, 1 est une valeur propre avec $\mathrm{Vect}(v)^\perp \subset \dim E_1$. De plus, $f(v) = v + \langle v, v\rangle u = v + ||v||^2 u$. Puisque $v \neq 0$ et donc $||v|| \neq 0$, on a $v \notin E_1$. Ainsi $E_1 = \mathrm{Vect}(v)^\perp$, et donc $\dim\ker(f - \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Vect}(v)^\perp = n - 1$.
   • On a $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})(x) = \langle x, v\rangle u$, ainsi $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(u)$, de plus $u \in \mathrm{Vect}(v)^\perp = E_1$ car $\langle u, v\rangle = 0$. Donc, $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \ker(f - \mathrm{Id})$.
2. Précédemment, on a montré que $\{1\} \subset \mathrm{Spec}(f)$ avec l'espace propre $E_1 = \mathrm{Vect}(v)^\perp$. Or, $E = \mathrm{Vect}(v) \oplus \mathrm{Vect}(v)^\perp$ et $f(v) \neq \lambda v$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathrm{Spec}(f) = \{1\}$. Puisque, 1 est la seule valeur propre de multiplicité géométrique $n-1$, f n'est pas diagonalisable.
3. Considérons $F = \mathrm{Vect}(v, u)$. Soit $||v|| = \sqrt{\alpha}$ alors la matrice de $f|_F$ dans la base (v, u) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, car

$$f(v) = v + ||v||^2 u = v + \alpha u \;\text{ et }\; f(u) = u.$$

   On peut compléter u en une base orthonormée $(u, w_1, \ldots, w_{n-2})$ pour $\mathrm{Vect}(v)^\perp$. Ainsi on obtient une base orthonormée $(v, u, w_1, \ldots, w_{n-2})$ pour $E = \mathrm{Vect}(v) \oplus \mathrm{Vect}(v)^\perp$ dans laquelle la matrice de f est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Dans une base orthonormée, f est représentée par une matrice non-symétrique donc f ne peut pas être auto-adjoint.