Licence de mathématiques
L2, algèbre 4
examen de rattrapage
mercredi 2 juillet 2025
durée 1H30

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1

2 Donner la définition d'un espace affine et donner un exemple.

Exercice 2 Soit la matrice réelle $R = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3 a) Montrer que R est une matrice de rotation. Déterminer son axe et son angle.

3 b) Déterminer P une matrice orthogonale telle que : $R = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_{\leqslant 2}[X]$ l'espace des polynômes réels de degrés $\leqslant 2$. On pose

$$\forall P, Q \in E, \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx \ .$$

3 a) Montrer que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien. Quelle est sa dimension ?

2 b) Montrer que l'application linéaire

$$E \to E, \ P(X) \mapsto P(1-X)$$

est un endomorphisme autoadjoint pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2 c) Soit F le sous-espace de E engendré par les polynômes X, X^2. Déterminer une base orthonormée de F.

2 d) Montrer que le polynôme $P = -\frac{10}{3}X^2 + 4X$ est le projeté orthogonal du polynôme constant 1 sur le sous-espace F, pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3 e) Déterminer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^2 dx.$$

Justifier sa réponse.

Exercice 4

Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour tous $A, B \in E$, on note $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}({}^t AB)$.

2 a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2 b) Soit $\mathscr{S} \leqslant E$ le sous-espace des matrices symétriques réelles. Dans E, déterminer une base de l'orthogonal $\mathscr{S}^\perp$ pour ce produit scalaire.