III.5 Matrices de Gram

Définition. Soient $e_1, ..., e_n \in E$. On note $G(e_1, ..., e_n) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition.

— La matrice $G(e_1, ..., e_n)$ est symétrique positive.

— La matrice $G(e_1, ..., e_n)$ est symétrique définie positive $\Leftrightarrow$ dét$G(e_1, ..., e_n) > 0 \Leftrightarrow e_1, ..., e_n$ sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendants.

— Pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \sqrt{\frac{\text{dét}G(x, f_1, ..., f_n)}{\text{dét}G(f_1, ..., f_n)}}$ pour toute base quelconque $(f_1, ..., f_n)$ de F.

Exercices.

1. Calculer $\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.
2. Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$, on pose $P(a_1, ..., a_n) = \{t_1 a_1 + ... + t_n a_n \ : \ 0 \leqslant t_1, ..., t_n \leqslant 1\}$. Vérifier par récurrence sur n que

$$\text{vol}(P(a_1, ..., a_n)) = \int_{x \in P(a_1, ..., a_n)} dx_1 ... dx_n = \sqrt{\text{dét}G(a_1, ..., a_n)} \ .$$

Exercice. Soit E un espace euclidien avec une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ de matrice P dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow$ $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

III.6 Angles entre vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Soient $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$. L'angle entre x, y est le réel $0 \leqslant \widehat{xy} \leqslant \pi$ tel que

$$\cos \widehat{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| ||y||} \ .$$

Exemple. $x \perp y \Leftrightarrow \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$; x, y *colinéaires* $\Leftrightarrow \widehat{xy} = \pm\pi$.

Exercice. Soit un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. L'angle entre les vecteurs issus du centre et pointés vers les sommets est $-\text{Arccos}\frac{1}{3} = \pi - \text{Arctan}(2\sqrt{2})$.

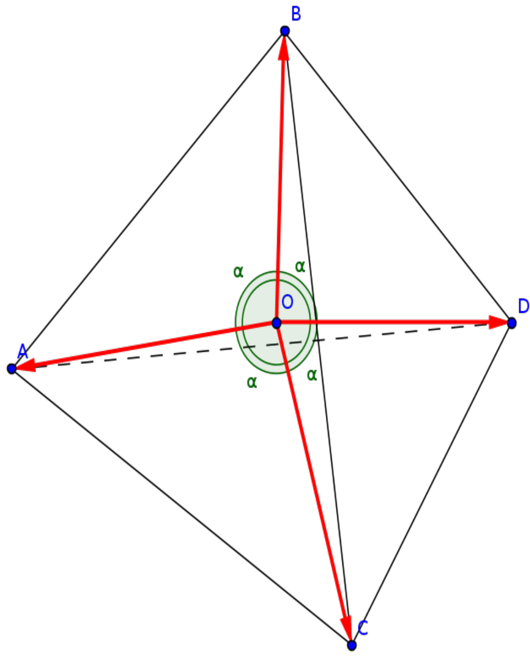

Figure 1 – $\alpha = -\text{Arccos}\frac{1}{3}$

IV Matrices orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Définition. Sont équivalentes.

i) $^\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

ii) f envoie toute base orthonormale sur une base orthonormale.

iii) f envoie une base orthonormale sur une base orthonormale.

On dit que f est *une transformation orthogonale* si une de ces assertions est vraie.

Notation. $O(E)$ = l'ensemble des transformations orthogonales de E.

Exercices.

1) $O(E) \leqslant \mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe.
2) Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $f \in O(E) \Leftrightarrow [f]_{\mathscr{B}} \in O_n(\mathbb{R})$ pour toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de E.

Définition. Soit $M \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. Sont équivalentes

i) ${}^tMM = I_n$ *« colonnes orthogonales »*.

ii) $M{}^tM = I_n$ *« lignes orthogonales »*.

iii) M inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Si une de ces conditions est vérifiée, on dit que la matrice M est *orthogonale.*

Remarques. i) $\Leftrightarrow$ « les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

ii) $\Leftrightarrow$ « les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

Une *matrice de rotation* est une matrice orthogonale de déterminant 1.

Notations. $O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercices.

1) $^\forall M = -{}^tM \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(I - M)(I + M)^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
2) $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \leqslant O_n(\mathbb{R}) \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, dét$M = \pm 1$.

Exemples. Les matrices de permutations, $I_n - 2v{}^tv$ pour tout vecteur colonne v de norme 1 pour le produit scalaire usuel, $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \frac{1}{\phi} \\ -\phi & \frac{1}{\phi} & 1 \\ \frac{1}{\phi} & -1 & \phi \end{pmatrix}$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.