Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2025

Fiche TD n^{o}7 ,

ESPACES VECTORIELS

Exercice 1.

a) Décomposer le vecteur $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ dans la base standard de $\mathbb{R}^2$, puis dans la base $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (1, -3)$, c'est-à-dire déterminer les coefficients λ_k unique tel que $v = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k b_k$.

b) Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la décomposition d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ dans cette base aboutit à résoudre un système lineaire de la forme $Ax = b$. (En particulier, spécifier la matrice A et les vecteurs x et b).

Exercice 2.

a) Montrer que la famille $((1, 2, 3); (4, 5, 6))$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

b) De même pour la famille suivante : $((1, 2, 3); (2, 4, 3))$.

c) Montrer que la famille $((1, 1, 1, 1); (2, 2, 3, 4))$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.

a) Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathbb{R}^3$ avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (4, 5, 6)$. Donner l'équation cartésienne de F.
Indication : Réaliser ceci en utilisant plusieurs méthodes. Une fois en utilisant le produit vectoriel (le plus rapide ici, mais applicable seulement dans $\mathbb{R}^3$), une autre fois en exigeant $\det(A) = 0$ où A est la matrice que l'on obtient en mettant les vecteurs u, v et (x, y, z) soit comme ses lignes, soit comme ses colonnes. Enfin, d'appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice A et d'exiger que A soit de rang deux.

b) Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Donner des équations cartésiennes du sous-espace F engendré par $(2, 1, 3, 6)$ et $(-1, 2, 6, -3)$.

Exercice 4.

a) Montrer que l'ensemble $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel.

b) Quelle est la dimension de E ? Trouver une base de E.

c) On note $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices générées par $\{\mathbb{1}_2\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

Exercice 5.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonction paires et par $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires :

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$$
$$\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$$

a) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

c) Quelle est la décomposition de la fonction exponentielle ?

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **6.**

On considère les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y+z+t=0\} \\ G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y=z+t\} \\ H &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,:\, a=b=c=d\}\,. \end{aligned}$$

a) Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F+G$? A-t-on $\mathbb{R}^4 = F+G$? $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 7.

On considère les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y=z\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+z=0\} \\ H &= \{(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x=y=-z\}\,. \end{aligned}$$

a) Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F+G$? A-t-on $\mathbb{R}^3 = F+G$? $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$.

Exercice 8.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t,-t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0,t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t,0,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_3 \cap F_1 = \{0\}$.

b) On pose $G = F_1 \oplus F_2$. La somme $G + F_3$ est-elle directe ? Justifier votre réponse.

Exercice 9.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 10 (CCF 2022)**.**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(X^3 - X - 1, X^2 + 1)$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de F.
   Indication : Quelles sont les équations à satisfaire pour $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ telles que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in F$?
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **11.**

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2\,u_n \quad (n \geq 0).$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.

c) Tenant compte du fait que les suites de $\mathcal{E}$ sont univoquement déterminées si on connaît u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.

d) Déterminer la suite de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.