Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2025

Fiche TD n°6 ,

Familles libres, génératrices

Famille libre/liée/génératrice

Exercice 1.

Étudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a) $u = (2, -3)$, $v = (-1, 1)$,

b) $u = (-6, 2)$, $v = (9, -3)$,

c) $u = (\mu + 1, -1)$, $v = (-3, \mu - 1)$, où $\mu \in \mathbb{R}$.

Exercice* 2.

a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits *parallèles* s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $u = \lambda v$. Montrer que cette notion de parallélisme est une relation d'équivalence.

b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Supposons que nous appelions deux vecteurs $u, v \in E$ parallèles s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$. Montrer que cette notion de parallélisme ne serait pas une relation d'équivalence.

c) Montrer que u et v sont liés si et seulement s'ils sont parallèles ou au moins un des deux vecteurs est le vecteur nul $0 \in E$.

Exercice 3.

Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $u = (2, -3, 2)$, $v = (-1, 1, -2)$;

b) $u = (-6, 2, 1)$, $v = (9, -3, 1)$;

c) $u = (-6, 2, 0)$, $v = (9, -3, 0)$;

d) $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$;

e) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$;

f) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$, $z = (1, 1, 1)$;

g) $u = (2, -3, 2), v = (-1, 1, -2), w = (-1, 4, 4)$;

h) $u = (2, -3, 2)$, $v = (-1, 1, -2)$, $w = (0, 0, 1)$;

i) $u = (1, 3, 2)$, $v = (-2, -1, -9)$, $w = (1, 2, 3)$.

Exercice 4.

Soit $F := \mathrm{Vect}(u, v)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u = (2, -3, 2)$ et $v = (-1, 1, -2)$. Parmi les vecteurs suivants, qui appartiennent à F ?

a) $x = (-1, 4, 4)$ **b)** $y = (0, 0, 1)$ **c)** $z = (1, 2, 3)$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

d) $F = \mathrm{Vect}(u, v, x)$

e) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u, v, x)$

f) $F = \mathrm{Vect}(u, x)$

g) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u, x)$

h) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u, v, x, y, z)$

Exercice 5. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on considère la suite

$$u_x = (x^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On s'intéresse à la famille de suites $(u_x)_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Est elle libre ?

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère la suite de polynômes de Tchebychev définie par :

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

1. Montrer que la famille $(T_n)_{n\geq 0}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Est-elle génératrice ?