Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2025

Fiche TD n°5 ,

ESPACES VECTORIELS

Pour commencer

Exercice 1.

a) Rappeler les axiomes d'un espace vectoriel.

b) On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et de la loi externe :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda x_1, 0)\,. \end{array}$$

A-t-on muni ainsi $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? (Justifier par rapport au point **a)**).

Des sous-espaces vectoriels

Exercice 2.

Dans les cas suivants, dessiner les sous-ensembles F de $E = \mathbb{R}^2$ et indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

a) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = 0\}$,

b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = 1\}$,

c) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$,

d) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$,

e) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \text{ et } y = -x^2\}$,

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,

g) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = 3\lambda, y = 2\lambda\}$,

h) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : x = 3\lambda, y = 2\lambda\}$,

i) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,

j) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1 \text{ et } y = -x^2\}$.

Exercice 3.

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants, lesquels forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?
(Ci-dessous $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \backslash \{\mathbb{0}\}$ et $b \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$).

a) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$,

b) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}$,

c) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, \sum_{k=1}^n x_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^n k^2 x_k = 0\}$,

d) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, A \cdot x = b\}$,

e) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, A \cdot x = 0\}$.

Exercice 4.

Parmi les sous-ensembles des matrices suivants, lesquels forment un sous-espace vectoriel ?
(Ci-dessous, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \backslash \{\mathbb{0}\}$).

a) $\{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) | \, A_{11} = 0\}$,

b) $\{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) | \, A_{11} > 0\}$,

c) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, \sum_{i=1}^n A_{ii} = 0\}$,

d) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A^T = A\}$,

e) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A^2 = A\}$,

f) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A \text{ inversible}\}$,

g) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A \text{ pas inversible}\}$,

h) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A \cdot B = B \cdot A\}$.

Exercice 5.

On admet que $E = \mathbb{R}[X]$, des polynômes à coefficients réels, est un espace vectoriel. Parmi les sous-ensembles F ci-dessous, lequels forment un sous-espace vectoriel ?

a) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}$,

b) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 3\}$,

c) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(3) = 0\}$,

d) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 3\}$,

e) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) + 3P'(0) = 0\}$,

f) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$,

g) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P = \lambda X^3 + \mu^3 X - \lambda, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6.

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels. Parmi les sous-ensembles de E ci-dessous, lesquels forment des sous-espaces vectoriels ?

a) $F = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$,

b) $G = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_n - 1\}$.

Exercice 7.

On note $\mathbb{R}^{[a,b]}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{R}^{[a,b]}$ et dire lesquels de ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ (ou de $\mathbb{R}^{]a,b[}$ pour le **e)**) :

a) $\mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N} \cup \infty$.

b) Les applications surjectives (resp. injectives) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

c) les applications $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$,

d) les applications $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) = f(b) + 1$,

e) les applications $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables t.q., $\forall x \in]a, b[, \ f''(x) + x^2 f(x) = 0$.

Exercice 8 (CC 2022)**.**

Les ensembles suivants sont des sous-ensembles d'espaces vectoriels, comme spécifiés par les conditions données. Lesquels d'entre eux sont des sous-espaces vectoriels ?
Répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \text{ ou } y = -x\}$
2. $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 1\}$
3. $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ commute avec } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$
4. $\{\ P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) < 2\}$
5. $\{\ P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 2\}$
6. $\{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f''(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$

Remarques sur la notation : tr représente la trace de la matrice, deux matrices A et B commutent si $A \cdot B = B \cdot A$, deg est le degré du polynôme et f'' la derivée seconde de la fonction f.