

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2025

Fiche TD n°3, Calcul matriciel II

Exercice 1. En donnant une forme échelonnée, calculer les inverses des matrices suivantes ou conclure qu'elles ne sont pas inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Calculer leur inverses lorsque c'est possible.

Indication : Comparer la matrice C avec la matrice A .

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'inverse de A .
2. Réécrire le système suivant sous forme matricielle et le résoudre en utilisant A^{-1} .

$$\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + z = 2 \\ 7x + 5y - 4z = -3 \end{cases}$$

Exercice 4. (CC 2022). Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. 1. Soient A et B de matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Soient A, B et C trois matrices inversibles. Donner la matrice réciproque de ABC ?
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $AB = \mathbb{1}_n$.
Montrer que $B = A^{-1}$.
4. Trouver A et B deux matrices telles que $A \cdot B = \mathbb{1}$ et $B \cdot A \neq \mathbb{1}$.

Indication : Si A et B sont des matrices carrées alors : $A \cdot B = \mathbb{1} \iff B \cdot A = \mathbb{1}$.

Exercice 6. Soit la matrice suivante :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

Mettre sous forme échelonnée réduite et exprimer son rang ainsi que son inverse (lorsqu'il existe).