Université Claude Bernard Lyon 1 | **Semestre de printemps 2025**

L1 mathématiques-informatique | UE : Algèbre 1 B (MAT1070L)

Contrôle final du 7 mai 2025

Durée : 1 heure et demie

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le sujet comporte deux pages.

Attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct.

Exercice 1. Soient a, b et c trois nombres *complexes*. On suppose que $a \neq 0$ et on note

$$A(X) = aX^2 + bX + c.$$

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $a + b\,\mathrm{i}$. *(C'est indépendant de la suite.)*

   Solution. On a $a = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(a)\,\mathrm{i}$ et $b = \mathrm{Re}(b) + \mathrm{Im}(b)\,\mathrm{i}$ donc $a + b\,\mathrm{i} = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(a)\,\mathrm{i} + \mathrm{Re}(b)\,\mathrm{i} - \mathrm{Im}(b)$, d'où $\boxed{\mathrm{Re}(a + b\,\mathrm{i}) = \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(b) \text{ et } \mathrm{Im}(a + b\,\mathrm{i}) = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Re}(b)}$. □

2. On suppose désormais que le polynôme A admet deux racines distinctes. Qu'est-ce que cela implique sur a, b et c ?

   Solution. Un polynôme de degré 2 admet deux racines distinctes si et seulement si son discriminant n'est pas nul. Ici, cela entraîne $\boxed{b^2 - 4ac \neq 0}$. □

3. On note z_1 et z_2 les racines de A. D'après le cours, il existe un polynôme B tel que

   $$A(X) = (X - z_1)B(X).$$

   Quel est le degré de B et quel est son coefficient dominant ?

   Solution. Le degré d'un produit est la somme des degrés donc $2 = 1 + \deg(B)$, c'est-à-dire que $\boxed{\deg(B) = 1}$. Le coefficient dominant est le produit des coefficients dominants [1] donc $\boxed{\text{le coefficient dominant de } B \text{ est } a}$. □

4. Après avoir justifié que $B(z_2) = 0$, démontrer que

   $$A(X) = a(X - z_1)(X - z_2).$$

   Solution. On a $0 = A(z_2) = (z_2 - z_1)B(z_2)$ et $z_2 - z_1 \neq 0$ par hypothèse donc $B(z_2) = 0$. Sachant grâce à la question 3 que $B(X) = aX + \beta$ pour β complexe convenable, on en déduit que $0 = az_2 + \beta$, c'est-à-dire que $B(X) = a(X - z_2)$, d'où en reportant : $\boxed{A(X) = a(X - z_1)(X - z_2)}$. □

---

1. Autrement dit, si $B(X) = \alpha X + \beta$, alors $aX^2 + \cdots = A(X) = (X - z_1)(\alpha X + \beta) = \alpha X^2 + \cdots$ donc $\alpha = a$.

5. En développant cette expression, démontrer les relations suivantes :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}\ ;$$
$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Solution. Développons :

$$A(X) = a(X - z_1)(X - z_2) = a(X^2 - z_1 X - z_2 X + z_1 z_2) = aX^2 - a(z_1 + z_2)X + az_1 z_2.$$

Vu que les coefficients de A sont a, b et c, on en déduit par unicité desdits coefficients :

$$b = -a(z_1 + z_2) \quad \text{et} \quad c = az_1 z_2,$$

d'où les relations souhaitées. □

Remarque. On aurait pu démontrer ces relations à partir de l'expression des racines, dont on fixe l'ordre arbitrairement en choisissant arbitrairement une racine δ de $\Delta = b^2 - 4ac$ (c'est-à-dire que $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$) et en posant

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

On calcule alors :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} + \frac{-b-\delta}{2a} = -2\frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}\ ;$$
$$z_1 z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \times \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{(-b+\delta)(-b-\delta)}{(2a)^2} = \frac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

La méthode choisie ici est plus intéressante car elle se prolonge à un polynôme de degré quelconque et permet de montrer des *relations entre coefficients et racines* même quand on n'a pas de formule pour les racines.

Remarque. Ces relations sont très commodes pour vérifier la valeurs des solutions à la fin d'un exercices (cf. l'exercice suivant...) ou pour trouver la deuxième racine lorsqu'on en connaît une.

Elles expliquent également que lorsqu'on connaît la somme s et le produit p de deux nombres complexes, on connaît ces nombres à l'ordre près (on ne sait pas lequel est lequel) car ce sont les deux racines du polynôme $X^2 - sX + p$.

Exercice 2. Soit

$$C(X) = -\mathrm{i}\, x^2 + (-8 + 3\,\mathrm{i})\, x + 18 + 12\,\mathrm{i}.$$

1. Déterminer les racines carrées de $7 + 24\,\mathrm{i}$.

Solution. On cherche x et y réels tels que $\delta = x + y\,\mathrm{i}$ soit une racine carrée de $7 + 24\,\mathrm{i}$. On a vu une infinité plus une fois la méthode :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = 7 + 24\,\mathrm{i} &\iff (x + y\,\mathrm{i})^2 = 7 + 24\,\mathrm{i} \text{ et } \left|x + y\,\mathrm{i}\right|^2 = |7 + 24\,\mathrm{i}| \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{7 + 25}{2} = 16 = 4^2 \\ y^2 = \dfrac{-7 + 25}{2} = 9 = 3^2 \\ xy = 12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 4 \text{ et } y = 3 \\ \text{ou} \\ x = -4 \text{ et } y = -3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les racines de } 7 + 24\,\mathrm{i} \text{ sont } 4 + 3\,\mathrm{i} \text{ et } -4 - 3\,\mathrm{i}}$. □

2. Déterminer les solutions de l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$-\mathrm{i}\, z^2 + (-8 + 3\,\mathrm{i})\, z + 18 + 12\,\mathrm{i} = 0.$$

Solution. On sait que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont $(-b \pm \delta)/(2a)$, où δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$. On trouve ici, avec $a = -\mathrm{i}$, $b = -8 + 3\,\mathrm{i}$ et $c = 18 + 12\,\mathrm{i}$:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-8 + 3\,\mathrm{i})^2 - 4 \times (-\mathrm{i}) \times (18 + 12\,\mathrm{i}) \\
&= 64 - 48\,\mathrm{i} - 9 + 72\,\mathrm{i} - 48 \\
&= 7 + 24\,\mathrm{i} && \text{(surprise !)}
\end{aligned}$$

puis, en prenant $\delta = 4 + 3\,\mathrm{i}$ comme racine carrée de Δ,

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{8 - 3\,\mathrm{i} + 4 + 3\,\mathrm{i}}{-2\,\mathrm{i}} = \frac{12}{-2\,\mathrm{i}} = 6\,\mathrm{i} \\
\text{et } z_2 &= \frac{8 - 3\,\mathrm{i} - 4 - 3\,\mathrm{i}}{-2\,\mathrm{i}} = \frac{4 - 6\,\mathrm{i}}{-2\,\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{i} + 3,
\end{aligned}$$

si bien que les racines de C sont $\boxed{z_1 = 6\,\mathrm{i}}$ et $\boxed{z_2 = 3 + 2\,\mathrm{i}}$. □

Remarque. Vérifions à l'aide de l'exercice 1 :

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 3 + 8\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad -\frac{b}{a} = -\frac{-8 + 3\,\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} = -(-8\,\mathrm{i} - 3) = 8 + 3\,\mathrm{i} \\
z_1 z_2 &= 18\,\mathrm{i} - 12 \qquad \text{et} \qquad \frac{c}{a} = \frac{18 + 12\,\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}(18 + 12\,\mathrm{i}) = 18\,\mathrm{i} - 12.
\end{aligned}$$

Cela confirme que la résolution est correcte.

3. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $C(X)$.

Solution. D'après le cours ou l'exercice 1, connaissant le coefficient dominant $a = -\mathrm{i}$ et les racines z_1 et z_2 de C, on a :

$$\boxed{C(X) = a(X - z_1)(X - z_2) = -\mathrm{i}(X - 6\,\mathrm{i})(X - 3 - 2\,\mathrm{i})}. \qquad \square$$

Exercice 3. Soient u et v deux nombres réels et soit

$$D(X) = X^4 + uX^3 - 18X^2 - 32X + v.$$

On suppose que -1 est une racine double de D.

1. Calculer u et v.

   Solution. Le fait que -1 soit une racine s'écrit $D(-1) = 0$ et le fait que ce soit une racine double ajoute la condition $D'(-1) = 0$. On calcule

   $$D'(X) = 4X^3 + 3uX^2 - 36X - 32,$$

   d'où

   $$\begin{aligned} \begin{cases} D(-1) = 0 \\ D'(-1) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 1 - u - 18 + 32 + v = 0 \\ -4 + 3u + 36 - 32 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -u + v = -15 \\ u = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{u = 0 \text{ et } v = -15}$, c'est-à-dire que $\boxed{D(X) = X^4 - 18X^2 - 32X - 15}$. $\square$

2. Déterminer le polynôme E tel que $D(X) = (X + 1)^2 E(X)$.

   Solution. *Première solution.* On pose la division euclidienne.

   $$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & X^4 & & -18X^2 & -32X & -15 & X^2+2X+1 \\ \cline{7-7}
\ominus & X^4 & +2X^3 & +X^2 & & & X^2-2X-15 \\ \cline{2-4}
 & & -2X^3 & -19X^2 & -32X & & \\
\ominus & & -2X^3 & -4X^2 & -2X & & \\ \cline{3-5}
 & & & -15X^2 & -30X & -15 & \\
\ominus & & & -15X^2 & -30X & -15 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

   Cela signifie que $\boxed{D(X) = (X + 1)^2 \left(X^2 - 2X - 15\right)}$.

   Deuxième solution. On cherche $E(X)$ sous la forme $E(X) = aX^2 + bX + c$ (le degré de E est nécessairement $\deg(D) - 2 = 2$). Le coefficient dominant est $a = 1$ car ceux de D et de $(X + 1)^2$ sont égaux à 1. Le coefficient constant de E est tel que $-15 = D(0) = 1^2 E(0) = c$. Reste à trouver b. On développe :

   $$(X^2 + 2X + 1)(X^2 + bX - 15) = X^4 + (b + 2)X^3 + (2b + 1 - 15)X^2 + (b - 30)X - 15$$

d'où, en identifiant les coefficients :

$$D(X) = (X+1)^2(X^2+bX-15) \iff \begin{cases} b+2=0 \\ 2b-14=-18 \\ b-30=-32 \end{cases} \iff b=2.$$

Ainsi $\boxed{D(X) = (X+1)^2(X^2-2X-15)}$, ce qui (heureusement) est cohérent avec la première solution. □

3. Calculer les racines de E.

Solution. On calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-15) = 64 = 8^2$, puis les racines :

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2-8}{2} = -3.$$

Ainsi $\boxed{\text{les racines de } E \text{ sont } 5 \text{ et } -3}$. □

4. Factoriser $D(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution. C'est un jeu d'écriture : d'après le cours ou l'exercice 1, on a

$$\boxed{D(X) = (X+1)^2(X-5)(X+3)}.$$ □

Exercice 4.

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^5 = 1.$$

Solution. Les solutions de cette équation sont les racines cinquièmes de l'unité. D'après le cours, $\boxed{\text{ce sont les } \zeta_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} \text{ pour } k \in \{0,1,2,3,4\}.}$ □

2. Résoudre l'équation suivante d'inconnnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^5 = -1.$$

Quel lien y a-t-il avec les solutions de l'équation de la question 1 ?

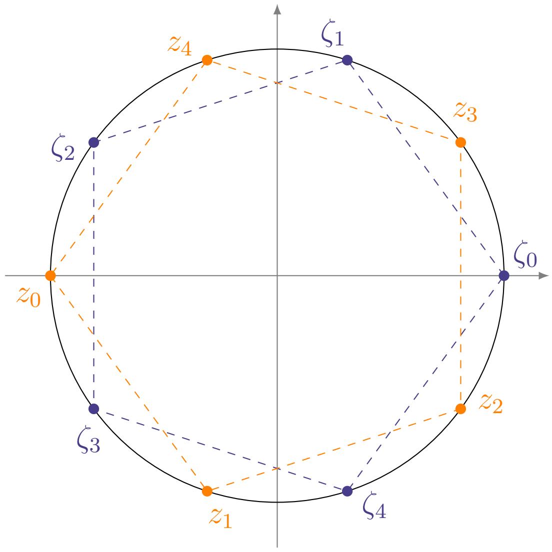
Solution. Première solution. On écrit le second membre sous forme exponentielle : son module est $|-1| = 1$, son argument est π (car $\cos\pi = -1$ $\sin\pi = 0$) donc $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$. On obtient une solution en prenant la racine cinquième du module ($1^{1/5} = 1$) et en divisant l'argument par 5, ce qui donne $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$. D'après le cours, les racines sont les

$$z_k = z_0\zeta_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{5}} \quad \text{pour } k \in \{0,1,2,3,4\},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1\pi}{5}}, \quad z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \quad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{5}}, \quad z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{5}}}.$$

Deuxième solution. On remarque que $z^5 = -1 = (-1)^5$ équivaut à $(-z)^5 = 1$. Cela signifie que z est solution de $z^5 = -1$ si et seulement si $-z$ est une racine de $X^5 - 1$ si et seulement si $z = -\zeta_k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ convenable.
Autrement dit, $\boxed{\text{les solutions } z_k \text{ de } z^5 = -1 \text{ sont les opposées des solutions } \zeta_k \text{ de } z^5 = 1}$.
□



3. En déduire la factorisation de $X^5 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis celle de $X^{10} - 1$.

Solution. Connaissant le degré de $X^5 - 1$ (c'est 5), son coefficient dominant (c'est 1) et ses cinq racines (ce sont les ζ_k), le cours permet de factoriser :

$$X^5 - 1 = (X - 1)\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\big)\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\big)\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}\big)\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}\big).$$

Connaissant le degré de $X^5 + 1$ (c'est 5), son coefficient dominant (c'est 1) et ses cinq racines (ce sont les z_k, ou les opposées des ζ_k), le cours permet de factoriser :

$$\boxed{X^5 + 1 = (X + 1)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\big)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\big)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}\big)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}\big)}.$$

Enfin, vu que $X^{10} - 1 = (X^5 - 1)(X^5 + 1)$, on peut écrire la factorisation de $X^{10} - 1$ de plusieurs façons :

$$\begin{aligned}
X^{10} - 1 &= (X - 1)\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\big)\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\big)\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}\big)\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}\big) \\
&\qquad \times (X + 1)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\big)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\big)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}\big)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}\big) \\
&= \prod_{k=0}^{4}\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}}\big)\big(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}}\big) \\
&= \prod_{k=0}^{9}\big(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{10}}\big).
\end{aligned}$$

□