Université Claude Bernard Lyon 1 — **Semestre de printemps 2024–2025**

L1 mathématiques-informatique — UE : Algèbre 1 B (MAT1070L)

Examen de deuxième session du 26 juin 2025

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.
Il importe de rédiger correctement, en particulier il est indispensable de faire des phrases.

Exercice 1. Soit

$$P(X) = -\mathrm{i}\,X^2 + (-9-4\,\mathrm{i})X - 16 + 20\,\mathrm{i}.$$

1. Calculer les racines carrées de $-15 + 8\,\mathrm{i}$.
2. Déterminer les solutions de l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$-\mathrm{i}\,z^2 + (-9-4\,\mathrm{i})z - 16 + 20\,\mathrm{i} = 0.$$

3. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X)$.

Solution. 1. On cherche x et y réels tels que $\delta = x + y\,\mathrm{i}$ soit une racine carrée de $-15+8\,\mathrm{i}$. On a vu une infinité plus une fois la méthode :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = -15+8\,\mathrm{i} &\iff (x+y\,\mathrm{i})^2 = -15+8\,\mathrm{i} \text{ et } |x+y\,\mathrm{i}|^2 = |-15+8\,\mathrm{i}| \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = 8 \\ x^2+y^2 = \sqrt{(-15)^2+8^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{-15+17}{2} = 1 = 1^2 \\ y^2 = \dfrac{15+17}{2} = 16 = 4^2 \\ xy = 4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = 4 \\ \text{ou} \\ x = -1 \text{ et } y = -4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les racines de } -15+8\,\mathrm{i} \text{ sont } 1+4\,\mathrm{i} \text{ et } -1-4\,\mathrm{i}}$.

2. On calcule le discriminant de l'équation :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-9-4\,\mathrm{i})^2 - 4\cdot(-\mathrm{i})\cdot(-16+20\,\mathrm{i}) \\
&= 81 - 16 + 72\,\mathrm{i} - 64\,\mathrm{i} - 80 \\
&= -15 + 8\,\mathrm{i} && \text{(surprise !)}
\end{aligned}$$

On a vu que $\delta = 4+\mathrm{i}$ est une racine carrée de Δ. Les solutions de l'équation sont donc ($\frac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$) :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{9+4\,\mathrm{i}+1+4\,\mathrm{i}}{-2\,\mathrm{i}} = \frac{5}{-\mathrm{i}} - 4 = -4 + 5\,\mathrm{i} \\
\text{et } z_2 &= \frac{9+4\,\mathrm{i}-1-4\,\mathrm{i}}{-2\,\mathrm{i}} = \frac{4}{-\mathrm{i}} = 4\,\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

À titre de vérification (cf. première session), on peut calculer

$$z_1 + z_2 = -4 + 9\,\mathrm{i} = -\frac{-9 - 4\,\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = -20 - 16\,\mathrm{i} = \frac{-16 + 20\,\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}.$$

3. Vu que le degré de P est 2, connaissant le coefficient dominant de P et ses racines z_1 et z_2, on peut écrire :

$$P(X) = -\mathrm{i}(X - z_1)(X - z_2) = -\mathrm{i}(X + 4 - 5\,\mathrm{i})(X - 4\mathrm{i}).$$ □

Exercice 2. Soit

$$j = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}.$$

1. Donner le module et un argument de j puis démontrer que $j^2 + j + 1 = 0$.
2. Soit z une racine cubique de j. Que valent $|z|$ et $z\,\overline{z}$? Que peut valoir l'argument de z ?
3. Soit

$$c = z + \overline{z}.$$

   (a) Justifier que c est réel et en donner une expression en fonction d'un argument de z.

   (b) En développant $\left(z + \overline{z}\right)^3$, démontrer que

$$c^3 = 3c - 1.$$

4. Déduire de la question 3 les racines du polynôme $X^3 - 3X + 1$, puis une factorisation de ce polynôme en produit de polynômes irréductibles. Démontrer enfin que

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{14\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}.$$

Solution. 1. Pour une exponentielle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel, le module vaut 1 et θ est un argument. Ici, $|j| = 1$ et $2\pi/3$ est un argument de j.

Première version. On devrait voir ou reconnaître que j est une racine cubique de l'unité :

$$j^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^3 = \mathrm{e}^{3\times\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1,$$

d'où $0 = j^3 - 1 = (j-1)(j^2 + j + 1)$ et, puisque $j - 1 \neq 0$, on conclut : $j^2 + j + 1 = 0$.

Deuxième version. Sinon, on peut connaître les lignes trigonométriques de $2\pi/3$:

$$j^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$$

$$-j - 1 = -\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) - 1 = -\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où l'égalité voulue : $j^2 = -j - 1$.

2. De $z^3 = j$, qui vient de la définition de z, on déduit que $|z|^3 = |j| = 1$. Comme $|z|$ est un réel positif et que l'application $x \mapsto x^3$ est bijective sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $|z| = 1$.

Par suite, on a également $z\,\overline{z} = |z|^2 = 1$.

Soit θ un argument de z. On a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = j = z^3 = \mathrm{e}^{3\theta\,\mathrm{i}}$. Cela entraîne l'existence de k entier tel que $3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi\,k$, c'est-à-dire $\theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$. À un multiple de 2π près, cela donne trois valeurs possibles de l'argument de z (obtenues avec $k \in \{0, 1, 2\}$) :

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{9}, \qquad \theta_2 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}, \qquad \theta_3 = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}.$$

3. (a) Soit $\theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ et $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On a :

$$\overline{c} = \overline{z + \overline{z}} = \overline{z} + z = c,$$

ce qui montre que c est réel. On a de plus :

$$c = z + \overline{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta + \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta = 2\cos\theta.$$

(Cela montre à nouveau que c est réel.)

(b) On a, d'après la formule du binôme de Newton et ce qui précède :

$$\begin{aligned}
c^3 &= \left(z + \overline{z}\right)^3 \\
&= z^3 + 3z^2\overline{z} + 3z\,\overline{z}^2 + \overline{z}^3 \\
&= j + 3z + 3\overline{z} + \overline{j} && (z^2\overline{z} = z \cdot z\overline{z} = z,\ z\,\overline{z}^2 = z\overline{z} \cdot \overline{z} = \overline{z}) \\
&= 3c + j + j^2 && (j \cdot j^2 = 1 = |j|^2 = j \cdot \overline{j} \implies j^2 = \overline{j}) \\
&= 3c - 1,
\end{aligned}$$

d'où $c^3 - 3c + 1 = 0$.

4. Ainsi, pour chaque choix de θ, le réel $c = 2\cos\theta$ est une racine de $P(X) = X^3 - 3X + 1$. On se convainc que les cosinus des θ_k sont deux à deux différents ($k \in \{1, 2, 3\}$), si bien que l'on connaît le coefficient et les trois racines de $P(X)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
X^3 - 3X + 1 &= 1 \cdot (X - 2\cos\theta_1)(X - 2\cos\theta_2)(X - 2\cos\theta_3) \\
&= \left(X - 2\cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(X - 2\cos\frac{8\pi}{9}\right)\left(X - 2\cos\frac{14\pi}{9}\right).
\end{aligned}$$

En évaluant en 0, on trouve :

$$1 = 0^3 - 3 \times 0 + 1 = \left(-2\cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(-2\cos\frac{8\pi}{9}\right)\left(-2\cos\frac{14\pi}{9}\right) = -8\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{14\pi}{9},$$

d'où la relation souhaitée. (NB : $\cos\frac{14\pi}{9} = \cos\frac{4\pi}{9}$.) □

Exercice 3. Soient les polynômes

$$\begin{aligned}
&A(X) = X^4 + 3\,X^3 - 12\,X^2 - 13\,X - 15 \\
\text{et}\quad &B(X) = X^2 + 2\,X - 15.
\end{aligned}$$

1. Effectuer la division euclidienne de A par B.
2. Donner la factorisation de A en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution. 1. On pose la division euclidienne de A par B.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & X^4 & +3X^3 & -12X^2 & -13X & -15 & X^2 + 2X - 15 \\ \cline{7-7}
\ominus & X^4 & +2X^3 & -15X^2 & & & X^2 + X + 1 \\ \cline{1-4}
 & & X^3 & +3X^2 & -13X & & \\
 & \ominus & X^3 & +2X^2 & -15X & & \\ \cline{2-6}
 & & & X^2 & +2X & -15 & \\
 & & \ominus & X^2 & +2X & -15 & \\ \cline{3-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Autrement dit,
$$A(X) = (X^2 + X + 1)B(X),$$
c'est-à-dire que le quotient est $X^2 + X + 1$ et le reste est nul.

2. On commence par factoriser $B(X)$. Pour cela, on cherche les racines de ce polynôme de degré 2. Son discriminant est $2^2 - 4 \times (-15) = 64 = 8^2$, d'où les racines $\frac{-2+8}{2} = 3$ et $\frac{-2-8}{2} = -5$. Autrement dit,
$$B(X) = (X - 3)(X + 5).$$
(On peut le vérifier en développant, ou en constatant que $3 - 5 = -2$ est l'opposé du coefficient de X et que $3 \times (-5) = -15$, le coeficient constant.)

Par ailleurs, si on n'a pas oublié l'exercice 2, on sait que les racines complexes de $X^2 + X + 1$ sont
$$j = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{j} = j^2 = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$
Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible (il est de degré deux et son discriminant est strictement négatif, ou bien il est de degré deux et ses racines ne sont pas réelles) et dans $\mathbb{C}[X]$,
$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2).$$
La factorisation de A en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est donc
$$A(X) = (X - 3)(X + 5)(X^2 + X + 1)$$
et, dans $\mathbb{C}[X]$,
$$A(X) = (X - 3)(X + 5)(X - j)(X - j^2).$$
□

Table des carrés des entiers de 11 à 25														
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625

Table des carrés des entiers de 26 à 40														
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600