Examen de deuxième session du 26 juin 2025

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Il importe de rédiger correctement, en particulier il est indispensable de faire des phrases.

Exercice 1. Soit

$$P(X) = -iX^2 + (-9 - 4i)X - 16 + 20i.$$

1. Calculer les racines carrées de $-15 + 8i$.
2. Déterminer les solutions de l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$-iz^2 + (-9 - 4i)z - 16 + 20i = 0.$$

3. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X)$.

Exercice 2. Soit

$$j = e^{2\pi i/3}.$$

1. Donner le module et un argument de j puis démontrer que $j^2 + j + 1 = 0$.
2. Soit z une racine cubique de j . Que valent $|z|$ et $z\bar{z}$? Que peut valoir l'argument de z ?
3. Soit

$$c = z + \bar{z}.$$

- (a) Justifier que c est réel et en donner une expression en fonction d'un argument de z .
- (b) En développant $(z + \bar{z})^3$, démontrer que

$$c^3 = 3c - 1.$$

4. Dédire de la question 3 les racines du polynôme $X^3 - 3X + 1$, puis une factorisation de ce polynôme en produit de polynômes irréductibles. Démontrer enfin que

$$\cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{14\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}.$$

Exercice 3. Soient les polynômes

$$A(X) = X^4 + 3X^3 - 12X^2 - 13X - 15$$

et $B(X) = X^2 + 2X - 15.$

1. Effectuer la division euclidienne de A par B .
2. Donner la factorisation de A en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Table des carrés des entiers de 11 à 25														
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625
Table des carrés des entiers de 26 à 40														
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600