
Contrôle final du 7 mai 2025

Durée : 1 heure et demie

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le sujet comporte deux pages.

Attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct.

Exercice 1. Soient a , b et c trois nombres complexes. On suppose que $a \neq 0$ et on note

$$A(X) = aX^2 + bX + c.$$

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $a + bi$. (*C'est indépendant de la suite.*)
2. On suppose désormais que le polynôme A admet deux racines distinctes. Qu'est-ce que cela implique sur a , b et c ?
3. On note z_1 et z_2 les racines de A . D'après le cours, il existe un polynôme B tel que

$$A(X) = (X - z_1)B(X).$$

Quel est le degré de B et quel est son coefficient dominant ?

4. Après avoir justifié que $B(z_2) = 0$, démontrer que

$$A(X) = a(X - z_1)(X - z_2).$$

5. En développant cette expression, démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -\frac{b}{a} ; \\ z_1 z_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit

$$C(X) = -ix^2 + (-8 + 3i)x + 18 + 12i.$$

1. Déterminer les racines carrées de $7 + 24i$.
2. Déterminer les solutions de l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$-iz^2 + (-8 + 3i)z + 18 + 12i = 0.$$

3. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $C(X)$.

Exercice 3. Soient u et v deux nombres réels et soit

$$D(X) = X^4 + uX^3 - 18X^2 - 32X + v.$$

On suppose que -1 est une racine double de D .

1. Calculer u et v .
2. Déterminer le polynôme E tel que $D(X) = (X + 1)^2 E(X)$.
3. Calculer les racines de E .
4. Factoriser $D(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^5 = 1.$$

2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^5 = -1.$$

Quel lien y a-t-il avec les solutions de l'équation de la question 1 ?

3. En déduire la factorisation de $X^5 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis celle de $X^{10} - 1$.