
Devoir surveillé 4

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite. Veuillez séparer clairement chaque exercice sur votre copie.

Exercice 1 Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

$$(1) x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{\sin x} \text{ à l'ordre 3 en } 0; \quad (2) x \mapsto \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en } 2;$$

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif? Est-il surjectif?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
4. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 3 Calculer la limite quand x tend vers 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\sin^4 x}.$$

Exercice 4 Soit n un entier, $n \geq 2$. On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n . Soit F l'ensemble des polynômes de E divisibles par $X^2 + 1$, c'est-à-dire

$$F = \{P \in E \mid \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X^2 + 1)Q\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.
2. Soit $H = \{aX + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. On admet que H est un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F et H sont supplémentaires dans E .
3. On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(P) = P(i)$ (où $i^2 = -1$). En utilisant la question précédente, déterminer le noyau de f . En déduire le rang de f puis l'image de f .