Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 2 avril 2025

Devoir surveillé 3

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.
Veuillez séparer clairement chaque exercice sur votre copie.

Exercice 1 Soit $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'application définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 0, x + y - z + t, t).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker f$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et préciser sa dimension.
4. A-t-on $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbf{R}^4$?

Exercice 2 Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1. Dans cette question, on considère, pour $n \in \mathbf{N}$, la suite de terme général
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Calculer I_0 et I_1. Ensuite, calculer $I_n + I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (*on pourra effectuer le changement de variable* $u = \tan x$).
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, en déduire qu'elle converge vers une limite ℓ.
   (c) En utilisant la question (a), montrer que cette limite est nulle.
2. Calculer une primitive de la fonction arctangente. (*Faire une intégration par parties*)
3. Calculer la limite suivante
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}.$$

Exercice 3 On définit les trois ensembles

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - 3z + t = 0\}, \qquad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x = y = z = t\}$$
$$\text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x - y - z = 0 \text{ et } x - z + t = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. On admettra que c'est également le cas pour F et G.
2. Calculer une base de E, de F et de G. Quelles sont leurs dimensions ?
3. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.
4. (a) Montrer que F et G sont en somme directe. En déduire une base de $F \oplus G$.
   (b) Trouver un espace vectoriel H de $\mathbf{R}^4$ qui est un supplémentaire de $F \oplus G$. *Indication : on pourra chercher un vecteur v qui complète la base de $F \oplus G$ en une base de $\mathbf{R}^4$, et prendre $H = \mathrm{Vect}\{v\}$.*
5. Trouver une base de $E \cap G$ et déterminer sa dimension. En déduire que $E + G = \mathbf{R}^4$.