Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 12 mars 2025

Devoir surveillé 2

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Soient $u = (2,1,4), v = (1,2,3), w = (0,3,2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. Expliciter une base de $F = \mathrm{Vect}(u, v, w) \subset \mathbb{R}^3$ et en déduire la dimension de F.
3. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 2y - 3z = 0\}$
4. Soit $f = (1, -1, 1)$ et $g = (4, 5, 10)$, Montrer que $F = \mathrm{Vect}(f, g)$
5. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$, Calculer $F \cap G$ et en donner une base.

Exercice 2 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que tout polynome $P \in \mathbb{R}_3[X]$ peut s'écrire de la forme
$$P = S + a \text{ avec } S \in F \text{ et } a \in \mathbb{R}.$$
3. Montrer que $F = \{(X - 1)Q : Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$ et en déduire une famille génératrice de F.
4. Donner une base de $F \subset \mathbb{R}_3[X]$. (On justifiera que la famille proposée est bien une base.)
5. Soient $P_1 = X(X-1)$, $P_2 = X(X-2)$, $P_3 = (X-1)(X-2)$, $P_4 = X(X-1)(X-2)$. Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3 On considère les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
$$f_1 : x \to \frac{2}{x-1}, \quad f_2 : x \to \frac{3}{x+1} \quad \text{et} \quad f_3 : x \to \frac{1}{x^2-1}.$$

1. La famille (f_1, f_2, f_3) forme-t-elle une famille libre ?
2. Calculer
$$S = \sum_{k=2}^{100} \frac{2}{k^2 - 1}$$

Exercice 4

1. Préciser pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ l'intégrale suivante a un sens et la calculer
$$I_1 = \int_a^b \frac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx,$$
2. Calculer l'intégrale suivante. (On pourra commencer par poser $u = x^2$.)
$$I_2 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$$