
Sujet CCP du 23 avril : éléments de correction

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction.

Problème 1. *Dans l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$ *on considère les vecteurs suivants :* $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ *et* $w = (-2, 1, 1)$. *On note* $F = \mathrm{Vect}(u)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(v, w)$.

1. *Montrer que* (u, v, w) *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Que peut-on en déduire sur les sous-espaces* F *et* G *?*
   Monrons que (u, v, w) est génératrice ; essayons donc d'écrire un vecteur $e = (x, y, z)$ sous la forme $au + bv + cw$, où (a, b, c) sont des réels. On résout le système associé :

$$\begin{cases} a + b - 2c = x \\ 2a + c = y \\ a - b + c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 2c = x \\ 2a + c = y \\ 2a - c = x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 2c = x \\ 2a + c = y \\ 2c = y - x - z \end{cases}$$

   Finalement, on obtient que $a = \frac{1}{4}(x + y + z)$, $b = \frac{1}{4}(-x + 3y - 5z)$ et $c = \frac{1}{2}(-x + y - z)$.
   Le système considéré a donc une solution unique pour tout (x, y, z), ce qui prouve que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   On en conclut que F et G sont supplémentaires.
   Remarque : on aurait pu rédiger différemment, par exemple en montrant que (u, v, w) est libre ; mais les questions suivantes montrent qu'on a intérêt à déjà savoir exprimer les vecteurs de la base canonique comme combinaisons linéaires de u, v, w.

2. *Calculer les coordonnées du vecteur* $(1, 1, 1)$ *dans cette base.*
   Il nous suffit d'appliquer le résultat du calcul de la question précédente pour obtenir que

$$(1, 1, 1) = \frac{3}{4}u - \frac{3}{4}v - \frac{1}{2}w$$

3. *On note* p *la projection sur* G *parallèlement à* F. *Déterminer une expression explicite de* $p(x, y, z)$ *pour* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   On a $p(u) = 0$, $p(v) = v$, $p(w) = w$. Puisque

$$(x, y, z) = \frac{1}{4}(x + y + z)u + \frac{1}{4}(-x + 3y - 5z)v + \frac{1}{2}(-x + y - z)w$$

   on obtient

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= \frac{1}{4}(-x + 3y - 5z)v + \frac{1}{2}(-x + y - z)w \\ &= \frac{1}{4}(-x + 3y - 5z)(1, 0, -1) + \frac{1}{2}(-x + y - z)(-2, 1, 1) \\ &= \frac{1}{4}(3x - y - z, -2x + 2y - 2z, -x - y + 3z) \end{aligned}$$

4. *On note* s *la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G. *Donner une relation entre* s *et* p, *et en déduire l'expression explicite de* $s(x, y, z)$ *pour* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   On sait que la projection p' sur F parallèlement à G est $\mathrm{id} - p$, et que $s = 2p' - \mathrm{id}'$, donc $s = -2p + \mathrm{id}$. Autrement dit, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

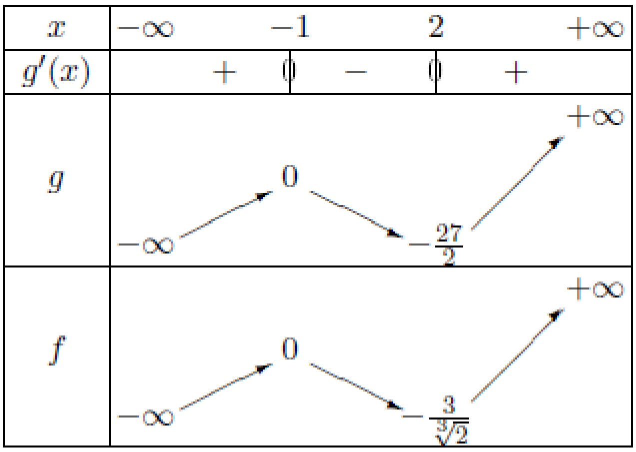
$$s(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x + y + z, 2x + 2z, x + y - z)$$

5. *On note enfin $f = 3\mathrm{id} - s$. Exprimer f en fonction de p et* id*, puis montrer que $6f - f^2 = 8\mathrm{id}$.*
On obtient
$$f = 3\mathrm{id} - s = 3\mathrm{id} + 2p - \mathrm{id} = 2\mathrm{id} + 2p$$
On a donc
$$f^2 = 4\mathrm{id}^2 + 4p^2 + 8p = 4\mathrm{id} + 12p$$
ce donc on déduit comme attendu par l'énoncé que
$$6f - f^2 = 12\mathrm{id} + 12p - 4\mathrm{id} - 12p = 8\mathrm{id}$$

6. *Montrer que f est une application bijective et préciser sa réciproque (on se contentera d'une expression de f^{-1} en fonction de p et* id*).*
Notons $g = \frac{1}{8}(6\mathrm{id} - f)$. Alors $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une application linéaire, et on vient de montrer que $f \circ g = \mathrm{id}$. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, cela suffit pour affirmer que f est bijective et que g est sa bijection réciproque. On a donc
$$f^{-1} = \frac{3}{4}\mathrm{id} - \frac{1}{8}f = \frac{3}{4}\mathrm{id} - \frac{1}{8}(2\mathrm{id} + 2p) = \frac{1}{2}\mathrm{id} - \frac{1}{4}p$$

Problème 2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (g(x))^{\frac{1}{3}}$, où $g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - \frac{7}{2}$.

1. Étudier les variations de g et en déduire celles de f.
La fonction g est polynomiale, sa dérivée se calcule facilement : pour $x \in \mathbb{R}$ on a
$$g'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x - 2)(x + 1)$$
Comme la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (c'est la réciproque de $x \mapsto x^3$, qui est strictement croissante), les variations de f sont les mêmes que celles de g, et on obtient les tableaux de variations ci-dessous.



2. *Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$, et donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.*
En $+\infty$ on a $g(x) \sim x^3$, et on voit que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme $\sqrt{u}^{1/3}$ tend vers 1 quand u tend vers 1, le fait que $g(x) \sim_{+\infty} x^3$ nous donne immédiatement que $f(x) \sim_{+\infty} x$.

3. *Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1 + u)^{\frac{1}{3}}$.*
On applique la formule vue en cours : en 0, on a
$$\begin{aligned}(1+u)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) u^2 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) \times \left(\frac{1}{3} - 2\right) u^3 + o(u^3)\\ &= 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + \frac{5}{81}u^3 + o(u^3)\end{aligned}$$

4. *Effectuer un développement asymptotique de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On poussera le développement seulement jusqu'à un ordre permettant d'obtenir l'équation d'une asymptote oblique ainsi que la position relative de la courbe représentative de f et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.*

   On écrit
$$f(x) = x\left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} - \frac{7}{2x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$
   Posons $u = \dfrac{1}{x}$, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$; en utilisant le développement limité de la question précédente à l'ordre 2, ce qui suffit ici, on obtient en $+\infty$:
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{u}\left(1 - \frac{3}{2}u - 6u^2 + o(u^2)\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{2}u - 2u^2 - \frac{1}{4}u^2 + o(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{u} - \frac{1}{2} - \frac{9}{4}u = o(u) \\
&= x - \frac{1}{2} - \frac{9}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$
   On vient de montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$, et qu'au voisinage de $+\infty$ cette courbe est en dessous de son asymptote.

5. *Expliquer pourquoi l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note u_n cette solution.*

   Le tableau de variation de g montre que g prend des valeurs négatives sur $]-\infty, 2[$, et que l'image de $[2, +\infty[$ par g est égale à $\left[-\dfrac{27}{2}, +\infty\right[$. On en déduit que tout $x > 0$ a un unique antécédent par g ; cela s'applique en particulier aux entiers strictement positifs et montre que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. *Donner un équivalent simple de u_n, puis un développement asymptotique à deux termes de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.*

   Montrons déjà que u_n tend vers $+\infty$; pour cela fixons $M > 0$, et soit $N \geq 2$ un entier tel que $N \geq g(M)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $g(u_n) = n \geq g(M)$, donc $u_n \geq M$ puisue g est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

   On vient de prouver que u_n tend vers $+\infty$. Ensuite on utilise le fait que $g(x) \sim x^3$ en $+\infty$ pour obtenir que $n = g(u_n) \sim u_n^3$, donc que $u_n \sim n^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$.

   On applique ensuite la même idée : on a
$$u_n^3\left(1 - \frac{3}{2u_n} - \frac{6}{u_n^2} - \frac{7}{2u_n^3}\right) = n$$
   Cela nous donne
$$\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}} = \left(1 - \frac{3}{2u_n} - \frac{6}{u_n^2} - \frac{7}{2u_n^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$$
   Comme $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, on a aussi $\dfrac{1}{u_n^2} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ et $\dfrac{1}{u_n^3} \sim \dfrac{1}{n}$, donc
$$1 - \frac{3}{2u_n} - \frac{6}{u_n^2} - \frac{7}{2u_n^3} = 1 - \frac{3}{2n^{\frac{1}{3}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)$$
   Finalement, une dernière composition de développement limité nous donne
$$\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{3}} + o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$$
   d'où $u_n = n^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{2} + o(1)$. On pourrait réutiliser cette idée pour obtenir une information encore plus précise sur u_n...