Université Claude Bernard - Lyon 1
Cursus préparatoire/CCP, 1ère année

Semestre de printemps 2024-2025
23 avril 2025

Sujet CCP n°4 , durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction.

Question de cours. Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E et que $y_1, \ldots, y_n$ sont des élements de F. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi \colon E \to F$ telle que $\varphi(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Problème 1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs suivants : $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (-2, 1, 1)$. On note $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $G = \mathrm{Vect}(v, w)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire sur les sous-espaces F et G ?
2. Calculer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans cette base.
3. On note p la projection sur G parallèlement à F. Déterminer une expression explicite de $p(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
4. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Donner une relation entre s et p, et en déduire l'expression explicite de $s(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
5. On note enfin $f = 3\mathrm{id} - s$. Exprimer f en fonction de p et id, puis montrer que $6f - f^2 = 8\mathrm{id}$.
6. Montrer que f est une application bijective et préciser sa réciproque (on se contentera d'une expression de f^{-1} en fonction de p et id).

Problème 2. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (g(x))^{\frac{1}{3}}$, où $g(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x - \dfrac{7}{2}$.

1. Étudier les variations de g et en déduire celles de f.
2. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$, et donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1 + u)^{\frac{1}{3}}$.
4. Effectuer un développement asymptotique de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On poussera le développement seulement jusqu'à un ordre permettant d'obtenir l'équation d'une asymptote oblique ainsi que la position relative de la courbe représentative de f et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
5. Expliquer pourquoi l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note u_n cette solution.
6. Donner un équivalent simple de u_n, puis un développement asymptotique à deux termes de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.