Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2024-2025

Cursus préparatoire/CCP, 1ère année — Première année

Sujet CCP du 9 avril: éléments de correction

Problème 1.

1. *On rappelle que* $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$*. Donner un développement limité à l'ordre* 3 *en* 0 *de* $\mathrm{ch}(x)$*.*

   Puisque $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ en 0, on a $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et on en déduit immédiatement que $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

2. *Donner un développement limité à l'ordre* 3 *en* 0 *de* $\dfrac{1}{(\mathrm{ch}(x))^2}$*.*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^2} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2} \\ &= \frac{1}{1 + x^2 + o(x^3)} \\ &= 1 - x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

   Ci-dessus, on a utilisé comme d'habitude l'égalité $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$.

3. *Donner un développement limité à l'ordre* 3 *en* 0 *de* $\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$*. En déduire un DL à l'ordre* 4 *en* 0 *de* $(\arctan(x))^2$ *(en expliquant le raisonnement effectué).*

   On sait que en 0 $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(x)}{1+x^2} &= \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{1+x^2} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)(1 - x^2) + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} - x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

   La fonction $x \mapsto \arctan(x)^2$ est 4 fois dérivable, et admet donc un développement limité en 0 à l'ordre 4 d'après la formule de Taylor-Young ; le terme constant de ce DL est 0 puisque $\arctan(0) = 0$. De plus la dérivée de cette fonction est $2\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$, dont un développement limité à l'ordre 3 en 0 est $2x - \dfrac{8}{3}x^3 + o(x^3)$.
   En appliquant le théorème d'intégration des développements limités, on conclut que en 0 on a

$$(\arctan(x))^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

4. *Donner le DL à l'ordre* 3 *en* 0 *de* $f \colon x \mapsto x + \ln(1+x)$*. On admet que* f *est une bijection de* $]-1, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$ *; calculer le DL à l'ordre* 3 *en* 0 *de sa réciproque* f^{-1}*.*

   Puisque $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ en 0, on obtient $x + \ln(1+x) = 2x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Comme f est une bijection en 0, $f(0)=0$ et $f'(0)=2\neq 0$, on sait que f^{-1} est 3 fois dérivable en 0 et admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, de la forme

$$f^{-1}(u)=\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+o(u^3)$$

On sait même déjà que $\alpha=(f^{-1})'(0)=\frac{1}{2}$ mais on va faire comme si on ne l'avait pas remarqué.
Pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$ on a $f^{-1}(f(x))=x$, ce qui nous donne au voisinage de 0 l'égalité

$$\begin{aligned} x &= \alpha\left(2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+\beta\left(2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^2+\gamma\left(2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3+o(x^3)\\ &= 2\alpha x+\left(-\frac{\alpha}{2}+4\beta\right)x^2+\left(\frac{\alpha}{3}-2\beta+8\gamma\right)x^3\ . \end{aligned}$$

Par unicité de la partie régulière d'un développement limité, on obtient $2\alpha=1$ donc $\alpha=\frac{1}{2}$; puis $4\beta=\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}$ d'où $\beta=\frac{1}{16}$; et enfin

$$8\gamma=2\beta-\frac{\alpha}{3}=\frac{1}{8}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{24}$$

Finalement, $\gamma=-\frac{1}{192}$. On arrive à l'égalité suivante au voisinage de 0 :

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{192}x^3+o(x^3)$$

Problème 2. *On considère dans cet exercice l'application $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(x,y,z)=(2x-y-z,7x-2y-5z,-x-y+2z)$$

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, et $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$. On a (en écrivant petit pour que ça rentre dans une seule ligne !) :

$$\begin{aligned} f(\lambda u+v) &= (2(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1-z_2),7(\lambda x_1+x_2)-2(\lambda y_1+y_2)-5(\lambda z_1-z_2),-(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)+2(\lambda z_1-z_2))\\ &= \lambda(2x_1-y_1-z_1,7x_1-2y_1-5z_1,-x_1-y_1+2z_1)+(2x_2-y_2-z_2,7x_2-2y_2-5z_2,-x_2-y_2+2z_2)\\ &= \lambda f(u)+f(v) \end{aligned}$$

Cela prouve que f est une application linéaire.

2. *Déterminer une base du noyau et de l'image de f.*
Déterminer si $u=(x,y,z)\in\ker(f)$ revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x-\ \ y-\ \ z=0\\ 7x-2y-5z=0\\ -x-\ \ y+2z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-y-\ \ z=0\\ 3x\qquad -3z=0\\ -3x\qquad +3z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x &= z\\ y &= x \end{cases}$$

Finalement, $\ker(f)$ est l'ensemble $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x=y=z\}$, autrement dit la droite vectorielle de vecteur directeur $(1,1,1)$. C'est un sous-espace vectoriel de dimension 1 dont $((1,1,1))$ est une base.
On sait maintenant (par le théorème du rang) que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. On a $f(1,0,0)=(2,7,-1)$ et $f(0,1,0)=(-1,-2,-1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels (on le vérifie par exemple en regardant leurs premières et deuxièmes coordonnées) et forment donc une famille libre dans l'espace $\mathrm{Im}(f)$, dont on a déjà dit qu'il est de dimension 2 : ils en forment une base.

3. *Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires.*

   Par le théorème du rang on sait déjà que $\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$; il nous reste à déterminer l'intersection $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$).

   Soit u un élément de cette intersection ; puisque $u \in \ker(f)$, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $u = (x, x, x)$. Puisque $u \in \mathrm{Im}(f)$, on peut d'après le résultat de la question précédente trouver λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda(2, 7, -1) + \mu(-1, -2, -1) = (2\lambda - \mu, 7\lambda - 2\mu, -\lambda - \mu)$. On en déduit que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ sont tels que $2\lambda - \mu = 7\lambda - 2\mu = -\lambda - \mu$. En particulier on a $2\lambda = -\lambda$ donc $\lambda = 0$, pis $-\mu = -2\mu$ donc $\mu = 0$.

   Finalement, $u = (0, 0, 0)$ et on a fini de prouver que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires.

4. *Calculer les noyaux* $\ker(f + \mathrm{id})$ *et* $\ker(f - 3\mathrm{id})$*, et donner une base de chacun d'eux.*

   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $u \in \ker(f+\mathrm{id})$ si, et seulement si, $f(u) = -u$. On arrive au système suivant :

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 7x - y - 5z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 4x \quad - 4z = 0 \\ -4x \quad + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2x \end{cases}$$

   Le noyau $\ker(f + \mathrm{id})$ est donc l'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^3 \colon \exists x \in \mathbb{R}\ u = (x, 2x, x)\}$, autrement dit la droite vectorielle de vecteur directeur $(1, 2, 1)$.

   Pour résoudre $f(u) = 3u$ on résout de même le système

$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ 7x - 5y - 5z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ 12x = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

   À nouveau $\ker(f - 3\mathrm{id})$ est de dimension 1, et le vecteur $(0, 1, -1)$ en est une base.

5. *En regroupant les deux bases de la question précédente avec la base de* $\ker(f)$ *obtenue précédemment, montrer qu'on obtient une base de* $\mathbb{R}^3$.

   On note $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (0, 1, -1)$. On souhaite montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$; il nous suffit de montrer que cette famille est libre puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

   On se retrouve amené à étudier le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha \quad + \gamma = 0 \\ \quad - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

   On vient de prouver que (u_1, u_2, u_3) est libre ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

6. *Montrer que les trois vecteurs de la base obtenue à la question précédente sont solutions de l'équation* $f^3(u) - 2f^2(u) - 3f(u) = 0$. *En déduire rigoureusement que* $f^3 = 2f^2 + 3f$.

   On a $f(u_1) = 0$ donc aussi $f^2(u_1) = 0$ et $f^3(u_1) = 0$. D'où $f^3(u_1) - 2f^2(u_1) - 3f(u_1) = 0$.

   On sait que $f(u_2) = -u_2$, donc $f^2(u_2) = -f(u_2) = u_2$ et de même $f^3(u_2) = f(u_2) = -u_2$. Par conséquent,

$$f^3(u_2) - 2f^2(u_2) - 3f(u_2) = -u_2 - 2u_2 + 3u_2 = 0$$

   De même, $f(u_3) = 3u_3$ donc $f^2(u_3) = 3f(u_3) = 9u_3$ et $f^3(u_3) = 9f(u_3) = 27u_3$. On obtient donc

$$f^3(u_3) - 2f^2(u_3) - 3f(u_3) = 27u_3 - 18u_3 - 9u_3 = 0$$

   On sait maintenant que $\ker(f^3 - 2f^2 - 3f)$ contient u_1, u_2 et u_3 ; comme ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ et $\ker(f^3 - 2f^2 - 3f)$ est un sous-espace vectoriel on a donc $\ker(f^3 - 2f^2 - 3f) = \mathbb{R}^3$, autrement dit $f^3 = 2f^2 + 3f$.