Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire/CCP, $1^{\text{ère}}$ année — Première année

---

Sujet CCP du 9 avril, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction.

Question de cours. Énoncer puis démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

Problème 1.

1. On rappelle que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{ch}(x)$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{(\mathrm{ch}(x))^2}$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$. En déduire un DL à l'ordre 4 en 0 de $(\arctan(x))^2$ (en expliquant le raisonnement effectué).
4. Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $f\colon x \mapsto x + \ln(1+x)$. On admet que f est une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$; calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de sa réciproque f^{-1}.

Problème 2. On considère dans cet exercice l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (2x - y - z, 7x - 2y - 5z, -x - y + 2z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
3. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires.
4. Calculer les noyaux $\ker(f + \mathrm{id})$ et $\ker(f - 3\mathrm{id})$, et donner une base de chacun d'eux.
   (On rappelle que id désigne l'application identité, $u \mapsto u$).
5. En regroupant les deux bases de la question précédente avec la base de $\ker(f)$ obtenue précédemment, montrer qu'on obtient une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que les trois vecteurs de la base obtenue à la question précédente sont solutions de l'équation $f^3(u) - 2f^2(u) - 3f(u) = 0$. En déduire rigoureusement que $f^3 = 2f^2 + 3f$.
   (On rappelle que $f^2(u) = f \circ f(u)$ et $f^3(u) = f \circ f \circ f(u)$)