Sujet CCP du 19 mars: éléments de correction

Problème 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une* famille positivement génératrice *(abrégé en fpg dans la suite de l'exercice) si pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.*

1. *Une base de E peut-elle être une fpg ? (On justifiera bien sûr la réponse donnée)*

   Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une fpg. On peut écrire $-e_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ avec chaque $\lambda_i \geq 0$. Mais alors $(\lambda_1 + 1)e_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i e_i = 0$, et $\lambda_1 + 1 > 0$. Par conséquent, $(e_1, \ldots, e_p)$ n'est pas libre : ce n'est donc pas une base, et on vient de prouver qu'une base ne peut pas être une fpg.

2. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n, -e_1, \ldots, -e_n)$ est une fpg.*

   Notons $f_i = e_i$ si $i \leq n$, $f_i = -e_{i-n}$ si $i \geq n+1$, de sorte que la famille considérée est $(f_1, \ldots, f_{2n})$. Soit $x \in E$; puisque $e_1, \ldots, e_n$ est génératrice, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Soit $I = \{i \in [\![1, n]\!] \colon \lambda_i \geq 0\}$. On a

   $$x = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i + \sum_{i \notin I} -\lambda_i f_{i+n}$$

   et on vient d'écrire x comme combinaison linéaire à coefficients positifs de $(f_1, \ldots, f_{2n})$: cette famille est bien une fpg.

3. *Montrer que la famille $((1,1), (-1,0), (0,-1))$ est une fpg de $\mathbb{R}^2$ (on pourra commencer par essayer d'écrire $(0,1)$ et $(1,0)$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs des élements de cette famille, puis appliquer le résultat de la question précédente).*

   Notons $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (-1,0)$ et $e_3 = (0,-1)$. On a $(0,1) = e_1 + e_2$ et $(1,0) = e_1 + e_3$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$; il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ tels que $x = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) + \lambda_3(-1,0) + \lambda_4(0,-1)$. Autrement dit, on a

   $$x = \lambda_1(e_1 + e_3) + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3 e_2 + \lambda_4 e_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_2 + (\lambda_1 + \lambda_4)e_3 \ .$$

   On vient d'écrire x comme combinaison linéaire à coefficient positifs de (e_1, e_2, e_3) : c'est une fpg.

4. (a) *On suppose que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est une fpg de E. Montrer qu'elle est génératrice et qu'il existe des réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$.*

   (indication : considérer $-e_1 - \ldots - e_p$)

   Déjà, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une fpg alors elle est génératrice. De plus, si c'est une fpg alors on peut trouver $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ positifs et tels que

   $$-e_1 - \ldots - e_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

   Ceci nous donne $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + 1)e_i = 0$, et $\lambda_i + 1 \geq 1 > 0$ pour tout i.

   (b) *Montrer la réciproque du résultat de la question précédente.*

Supposons que $(e_1,\dots,e_p)$ est génératrice et qu'il existe des réels strictement positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i = 0$.

Soit $x \in E$; puisque $(e_1,\dots,e_p)$ est génératrice, il existe des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i e_i$. De plus, puisque $\lambda_i > 0$, il existe pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ un entier $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_i + n_i\lambda_i \geq 0$. Soit $N = \max\{n_i \colon i \in [\![1,p]\!]\}$. Alors $\alpha_i + N\lambda_i \geq 0$ pour tout i, et

$$x = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i e_i + N\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i + N\lambda_i)e_i$$

On vient de prouver que $(e_1,\dots,e_p)$ est une fpg.

Problème 2.

1. *Pour $a > 0$, calculer $\int_1^a \frac{\ln(t)}{t}\,dt$.*

   On a
   $$\int_1^a \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^a = \frac{1}{2}(\ln(a))^2 \ .$$

On cherche dans cet exercice à calculer l'intégrale $I(a) = \int_1^a \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^4+a^2}{x^2+a^2}\right)dx$, où a est un réel strictement positif.
On posera également $J(a) = \int_1^a \frac{1}{x}\ln(x^4+a^2)\,dx$ et $K(a) = \int_1^a \frac{1}{x}\ln(x^2+a^2)\,dx$.

2. *Justifier brièvement que les trois intégrales considérées ci-dessus existent pour tout $a > 0$.*

   Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^4+a^2}{x^2+a^2}\right)$, $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x^4+a^2)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x^2+a^2)$ sont continues sur $]0,+\infty[$, et donc intégrables sur le segment $[1,a]$.

3. *À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{a}t$, montrer que pour tout $a > 0$ on a $J(a) = 2(\ln(a))^2 + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t}\ln(t^4+1)\,dt$.*

   La fonction intégrée est continue, et le changement de variables $t \mapsto \sqrt{a}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et bijectif de $\left[\frac{1}{\sqrt{a}},\sqrt{a}\right]$ sur $[1,a]$. Le théorème de changement de variables s'applique donc et donne :

$$\begin{aligned}
J(a) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}t}\ln(a^2t^4+a^2)\sqrt{a}\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t}(\ln(t^4+1)+\ln(a^2))\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{2\ln(a)}{t}\,dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t}(\ln(t^4+1)\,dt \\
&= 2\ln(a)(\ln(\sqrt{a}) - \ln(1/\sqrt{a})) + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t}(\ln(t^4+1)\,dt \\
&= 2(\ln(a))^2 + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t}\ln(t^4+1)\,dt
\end{aligned}$$

4. *À l'aide d'un changement de variable similaire au précédent, montrer que pour tout $a > 0$ on a $K(a) = 2(\ln(a))^2 + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t}\ln(t^2+1)\,dt$.*

Cette fois on utilise le changement de variables de classe C^1, $t \mapsto at$ qui est une bijection de $\left[\frac{1}{a}, 1\right]$ sur $[1, a]$. On obtient

$$\begin{aligned}
K(a) &= \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{at} \ln(a^2t^2 + a^2)\, a dt \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} (\ln(t^2+1) + \ln(a^2))\, dt \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{2\ln(a)}{t}\, dt + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\, dt \\
&= 2\ln(a)(\ln(1) - \ln(1/a)) + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\, dt \\
&= 2(\ln(a))^2 + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\, dt
\end{aligned}$$

5. *On note maintenant* $G(a) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} \ln(t^4+1)\, dt$ *et* $H(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2+1)\, dt$.

   (a) *Justifier que la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t} \ln(t^2+1)$ *admet une primitive sur* $]0, +\infty[$.

   Cette fonction est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$; le théorème fondamental de l'analyse nous garantit qu'elle admet une primitive sur cet intervalle.

   On fixe une telle primitive, qu'on note F *dans la suite de l'exercice.*

   (b) *Calculer la dérivée de la fonction* H *(exprimer* $H(a)$ *en fonction de* F*, sans chercher à calculer* F*, puis dériver l'expression obtenue par rapport à* a*, en faisant bien attention aux composées)*

   On a par définition $H(a) = F(1) - F(1/a)$. Le théorème de dérivation des fonctions composées nous donne donc

$$H'(a) = \frac{1}{a^2} F'(1/a) = \frac{1}{a^2} a \ln\left(\frac{1}{a^2} + 1\right) = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{a^2} + 1\right) = \frac{1}{a} \ln(a^2+1) - \frac{1}{a} \ln(a^2)$$

   (c) *En utilisant la même méthode qu'à la question précédente, dériver la fonction* G.

   Cette fois on considère une primitive F_1 de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t} \ln(t^4+1)$. On a pour tout $a > 0$ l'égalité $G(a) = F_1(\sqrt{a}) - F_1(1/\sqrt{a})$; en appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées, on aboutit à

$$\begin{aligned}
G'(a) &= \frac{1}{2\sqrt{a}} F_1'(\sqrt{a}) + \frac{1}{2a\sqrt{a}} F_1'(1/\sqrt{a}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(a^2+1) + \frac{1}{2a\sqrt{a}} \sqrt{a} \ln(1 + \frac{1}{a^2}) \\
&= \frac{1}{2a} \ln(a^2+1) + \frac{1}{2a} \ln(1 + \frac{1}{a^2}) \\
&= \frac{1}{2a} \ln(a^2+1) + \frac{1}{2a} \ln(a^2+1) - \frac{1}{2a} \ln(a^2) \\
&= \frac{1}{a} \ln(a^2+1) - \frac{1}{a} \ln(a)
\end{aligned}$$

   (d) *En déduire une expression simplifiée de* $G(a) - H(a)$*, puis conclure sur la valeur de* $I(a)$.

   On obtient finalement que $G'(a) - H'(a) = \frac{\ln(a)}{a}$; de plus $G(1) = H(1) = 0$. Puisque $I(a) = G(a) - H(a)$ pour tout $a > 0$, on en conclut que $I(a)$ est la primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ qui s'annule en 1, autrement dit

$$I(a) = \int_1^a \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln(a))^2 \ .$$