Sujet CCP du 19 mars, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction.

Question de cours. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que si F et G sont en somme directe alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Problème 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une *famille positivement génératrice* (abrégé en fpg dans la suite de l'exercice) si pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.

1. Une base de E peut-elle être une fpg ? (On justifiera bien sûr la réponse donnée)
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n, -e_1, \ldots, -e_n)$ est une fpg.
3. Montrer que la famille $((1,1), (-1,0), (0,-1))$ est une fpg de $\mathbb{R}^2$ (on pourra commencer par essayer d'écrire $(0,1)$ et $(1,0)$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs des élements de cette famille, puis appliquer le résultat de la question précédente).
4. (a) On suppose que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est une fpg de E. Montrer qu'elle est génératrice et qu'il existe des réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$.
   (indication : considérer $-e_1 - \ldots - e_p$).
   (b) Montrer la réciproque du résultat de la question précédente.

Problème 2.

1. Pour $a > 0$, calculer $\int_1^a \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.

On cherche dans cet exercice à calculer l'intégrale $I(a) = \int_1^a \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x^4 + a^2}{x^2 + a^2}\right) dx$, où a est un réel strictement positif.
On posera également $J(a) = \int_1^a \frac{1}{x} \ln(x^4 + a^2)\, dx$ et $K(a) = \int_1^a \frac{1}{x} \ln(x^2 + a^2)\, dx$.

2. Justifier brièvement que $I(a)$, $J(a)$ et $K(a)$ sont bien définies pour tout $a > 0$.
3. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{a}t$, montrer que pour tout $a > 0$ on a
$$J(a) = 2(\ln(a))^2 + \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} \ln(t^4 + 1)\, dt \; .$$
4. À l'aide d'un changement de variable similaire au précédent, montrer que pour tout $a > 0$ on a
$$K(a) = 2(\ln(a))^2 + \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2 + 1)\, dt \; .$$
5. On note maintenant $G(a) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{t} \ln(t^4 + 1)\, dt$ et $H(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t} \ln(t^2 + 1)\, dt$.
   (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} \ln(t^2 + 1)$ admet une primitive sur $]0, +\infty[$.
   On fixe une telle primitive, qu'on note F dans la suite de l'exercice.

(b) Calculer la dérivée de la fonction H (exprimer $H(a)$ en fonction de F, sans chercher à calculer F, puis dériver l'expression obtenue par rapport à a, en faisant bien attention aux composées).

(c) En utilisant la même méthode qu'à la question précédente, dériver la fonction G.

(d) En déduire une expression simplifiée de $G(a) - H(a)$, puis conclure sur la valeur de $I(a)$.