

Sujet CCP du 26 février, durée 1h30 : éléments de correction.

Problème 1. Dans cet exercice, on considère la fraction rationnelle $F = \frac{2X^2 - 10X + 6}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X}$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$

(indication : le dénominateur de F a 4 racines réelles, dont au moins 2 sont évidentes).

Le numérateur est de degré 2 et le dénominateur de degré 4 : la partie entière de F est nulle. On doit ensuite factoriser $X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X = X(X^3 - 2X^2 - X + 2)$. 1 et -1 sont aussi racines évidentes, ce qui nous amène à

$$X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X = X(X - 1)(X + 1)(X - 2)$$

Tout ceci nous permet de conclure qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{X - 2}$$

En multipliant par X et en substituant $X = 0$ on obtient $a = \frac{6}{2} = 3$. En procédant de la même façon avec $X - 1$, $X + 1$ et $X - 2$ on arrive à la décomposition

$$F = \frac{3}{X} - \frac{3}{X + 1} + \frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X - 2}$$

2. Pour tout entier naturel $N \geq 4$ on pose

$$S_N = \sum_{k=4}^N \frac{2k^2 - 10k + 6}{k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k}$$

Calculer S_N pour tout $N \geq 4$; puis montrer que S_N est convergente et déterminer sa limite quand $N \rightarrow +\infty$.

Notons déjà que, comme les pôles de F sont -1, 0, 1 et 2, S_N est bien définie pour tout $N \geq 4$. À l'aide du résultat de la question précédente, on obtient pour tout $N \geq 4$:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=4}^N \left(\frac{3}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-2} \right) \\ &= 3 \sum_{k=4}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=4}^N \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{N+1} + \frac{1}{N-1} \end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure que S_N est convergente et converge vers $\frac{1}{4}$.

Problème 2. On considère les trois polynômes suivants de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X - 3; \quad Q = X + 3; \quad R = X^2 - 9.$$

1. Démontrer que (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (on rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3).

Considérons a, b, c tels que $aP + bQ + cR = 0$. En évaluant en 3, on obtient $6b = 0$, donc $b = 0$. De même, en évaluant en -3 on arrive à $-6a = 0$ donc $a = 0$. Finalement $c(X^2 - 9) = 0$, d'où $c = 0$.

La famille (P, Q, R) est donc une famille libre à 3 éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, dont l'énoncé nous rappelle qu'il est de dimension 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Dans $\mathbb{R}(X)$ on considère le sous-espace $F = \text{Vect} \left(\frac{P}{Q}, \frac{1}{P}, \frac{1}{Q}, \frac{1}{R} \right)$. Déterminer une base de F .

On a $\frac{1}{R} = \frac{1}{(X-3)(X+3)}$; le théorème de décomposition en éléments simples nous garantit que $\frac{1}{R}$ s'écrit sous la forme $\frac{a}{X-3} + \frac{b}{X+3}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Autrement dit $\frac{1}{R} \in \text{Vect} \left(\frac{1}{P}, \frac{1}{Q} \right)$.

Par conséquent, la famille $\left\{ \frac{P}{Q}, \frac{1}{P}, \frac{1}{Q} \right\}$ est une famille génératrice de F . Montrons maintenant que cette famille est libre : soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \frac{P}{Q} + \frac{b}{P} + \frac{c}{Q} = 0$$

Comme $\frac{P}{Q}$ est de degré 0 alors que $\frac{1}{P}$ et $\frac{1}{Q}$ sont de degré -1 , on en déduit que $a = 0$. Puis le théorème d'unicité de décomposition en éléments simples (ou une simple réduction au même dénominateur) donne $b = c = 0$.

Donc $\left(\frac{P}{Q}, \frac{1}{P}, \frac{1}{Q} \right)$ est une famille libre de F ; finalement, c'est une base de F .

Problème 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on note $E_{i,j}$ la matrice **de** $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception du coefficient sur la i -ième ligne et la j -ième colonne qui vaut 1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

L'énoncé aurait dû stipuler que les matrices considérées appartiennent toutes à $M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$, et $E_{i,j}E_{j,k} = E_{i,k}$.

Soit $p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour simplifier les notations, notons $A = E_{i,j}$ et $B = E_{k,l}$. Alors le coefficient de AB sur la ligne p et la colonne q est égal à

$$\sum_{r=1}^n a_{p,r} b_{r,q}$$

Par définition, $a_{p,r}$ vaut 0 sauf si $p = i$, $r = j$; et $b_{r,q}$ vaut 0 sauf si $r = k$, $q = l$. Donc si $j \neq k$ tous les coefficients de AB sont nuls, autrement dit $AB = 0$. Et si $j = k$ alors le seul coefficient non nul est obtenu pour $p = i$, $q = l$, et ce coefficient vaut $1 \cdot 1 = 1$. On en conclut comme attendu que $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$, et $E_{i,j}E_{j,k} = E_{i,k}$.

2. Soit $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $I_n + E_{i,j}$ est inversible et déterminer son inverse.

On a en fait déjà vu cette matrice en cours : c'est une matrice de transvection. Son inverse est donc $I_n - E_{i,j}$, ce qu'on peut vérifier directement en écrivant

$$(I_n + E_{i,j})(I_n - E_{i,j}) = I_n + E_{i,j} - E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,j} = I_n$$

(On a utilisé que $i \neq j$ pour obtenir que $E_{i,j}E_{i,j} = 0$; si $i = j$ la matrice considérée est aussi inversible, c'est une matrice de dilatation)

3. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Exprimer les coefficients de $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ en fonction de ceux de A . Notons $I = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $A = \sum_{(p,q) \in I} a_{p,q} E_{p,q}$ et on obtient donc

$$AE_{i,j} = \sum_{(p,q) \in I} a_{p,q} E_{p,q} E_{i,j} = \sum_{p=1}^n a_{p,i} E_{p,j}$$

On obtient donc que $AE_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes, sauf la j -ième, sont nulles ; et le coefficient sur la p -ième ligne et la j -ième colonne de $AE_{i,j}$ est égal à $a_{p,i}$.

De la même façon, on obtient

$$E_{i,j}A = \sum_{(p,q) \in I} a_{p,q} E_{i,j} E_{p,q} = \sum_{q=1}^n a_{j,q} E_{i,q}$$

Par conséquent, $E_{i,j}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la i -ième ; et le coefficient sur la i -ième ligne et la q -ième colonne de $E_{i,j}A$ est égal à $a_{j,q}$.

4. On suppose que $AM = MA$ pour toute matrice inversible $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est une matrice diagonale, puis qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Pour tout $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket \in I$ on a $A(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j})A$, donc $AE_{i,j} = E_{i,j}A$.

En regardant le coefficient d'indice (i, i) de ces deux matrices, on obtient $0 = a_{j,i}$ pour tout $i \neq j$: donc A est une matrice diagonale.

En regardant le coefficient d'indice (i, j) de ces deux matrices, on obtient $a_{i,i} = a_{j,j}$. Donc tous les coefficients diagonaux de A sont égaux : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Problème 4. On considère la fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Soit (a, b) deux éléments de $[0, 1]$ tels que $a < b$ et $I = [a, b]$. Montrer que $\inf\{f(x) : x \in I\} = 0$ et $\sup\{f(x) : x \in I\} = 1$.

Puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $x \in I \setminus \mathbb{Q}$, donc tel que $f(x) = 0$. Comme $f(y) \geq 0$ pour tout $y \in [0, 1]$, on en déduit que 0 est le minimum de f sur I , en particulier $\inf\{f(x) : x \in I\} = 0$.

De la même façon, en utilisant que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ on obtient que $\sup\{f(x) : x \in I\} = 1$.

2. La fonction f est-elle intégrable sur $[0, 1]$?

Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[0, 1]$. En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient que la somme de Darboux inférieure $S_-(f, \sigma)$ est égale à

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \inf_{[a_i, a_{i+1}]} f = \sum_{i=0}^{n-1} 0 = 0 .$$

De même, la somme de Darboux supérieure $S_+(f, \sigma)$ est égale à

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \sup_{[a_i, a_{i+1}]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_0 = 1 .$$

Par conséquent, $S_+(f, \sigma) = 1$.

On en déduit que $I_-(f) = 0$ tandis que $I_+(f) = 1$: la fonction f n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.