Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire/CCP, $1^{\text{ère}}$ année Première année

---

Sujet CCP du 26 février, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction.

Problème 1. Dans cet exercice, on considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{2X^2 - 10X + 6}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X}$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$
   (indication : le dénominateur de F a 4 racines réelles, dont au moins 2 sont évidentes).
2. Pour tout entier naturel $N \geq 4$ on pose

$$S_N = \sum_{k=4}^{N} \frac{2k^2 - 10k + 6}{k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k}$$

   Calculer S_N pour tout $N \geq 4$; puis montrer que S_N est convergente et déterminer sa limite.

Problème 2. On considère les trois polynômes suivants de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X - 3\,; \quad Q = X + 3\,; \quad R = X^2 - 9\ .$$

1. Démontrer que (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (on rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3).
2. Dans $\mathbb{R}(X)$ on considère le sous-espace $F = \operatorname{Vect}\left(\dfrac{P}{Q}, \dfrac{1}{P}, \dfrac{1}{Q}, \dfrac{1}{R}\right)$. Déterminer une base de F.

Problème 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception du coefficient sur la i-ième ligne et la j-ième colonne qui vaut 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $i, j, k, l \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$, et $E_{i,j}E_{j,k} = E_{i,k}$.
2. Soit $i \neq j \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $\mathrm{I_n} + E_{i,j}$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$. Exprimer les coefficients de $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ en fonction de ceux de A.
4. On suppose que $AM = MA$ pour toute matrice inversible $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est une matrice diagonale, puis qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda \mathrm{I}_n$.

Problème 4. On considère la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Soit (a,b) deux éléments de $[0,1]$ tels que $a < b$ et $I = [a,b]$. Montrer que $\inf\{f(x)\colon x \in I\} = 0$ et $\sup\{f(x)\colon x \in I\} = 1$.
2. La fonction f est-elle intégrable sur $[0,1]$?