Calculs d'intégrales

Analyse 2, printemps 2025

Polynômes trigonométriques

Ce sont des sommes d'intégrales de la forme $\int_a^b \cos^n(x)\sin^m(x)$.

Polynômes trigonométriques

Ce sont des sommes d'intégrales de la forme $\int_a^b \cos^n(x)\sin^m(x)$.

Si n ou m est impair, on fait un changement de variables. Par exemple si $m = 2k+1$ on écrit $\sin^m(x) = \sin^{2k}(x)\sin(x) = (1-\cos^2(x))^k \sin(x)$ et on pose $u = \cos(x)$.

Polynômes trignométriques

Un exemple : $\sin^7(x)\cos^{12}(x)$

Polynômes trignométriques

Un exemple : $\sin^7(x)\cos^{12}(x)$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sin^7(x)\cos^{12}(x)dx &= \int_0^t (1-\cos^2(x))^3\cos^{12}(x)(\sin(x)dx) \\
&= \int_1^{\cos(t)} (1-u^2)^3 u^{12}(-du) \\
&= \int_{\cos(t)}^1 (1-3u^2+3u^4-u^6)u^{12}du \\
&= \left[\frac{u^{13}}{13}-\frac{3u^{15}}{15}+\frac{3u^{17}}{17}-\frac{u^{19}}{19}\right]_{\cos(t)}^1 \\
&= \frac{1}{13}-\frac{1}{5}+\frac{3}{17}-\frac{1}{19}-\frac{\cos^{13}(t)}{13}+\frac{\cos^{15}(t)}{15}-\frac{3\cos^{17}(t)}{17}+\frac{\cos^{19}(t)}{19} \\
&= \frac{16}{20995}-\frac{\cos^{13}(t)}{13}+\frac{\cos^{15}(t)}{15}-\frac{3\cos^{17}(t)}{17}+\frac{\cos^{19}(t)}{19}
\end{aligned}$$

Polynômes trigonométriques

Si jamais n et m sont tous les deux pairs, alors pour intégrer $\cos^n(x)\sin^m(x)$ on doit linéariser, par exemple en passant par $\mathbb{C}$.

Polynômes trigonométriques

Si jamais n et m sont tous les deux pairs, alors pour intégrer $\cos^n(x)\sin^m(x)$ on doit linéariser, par exemple en passant par $\mathbb{C}$.

Un exemple : $\cos^4(x)$.

Polynômes trigonométriques

Si jamais n et m sont tous les deux pairs, alors pour intégrer $\cos^n(x)\sin^m(x)$ on doit linéariser, par exemple en passant par $\mathbb{C}$.

Un exemple : $\cos^4(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^t \cos^4(x)dx &= \int_0^t \left(\frac{e^{\imath x}+e^{-\imath x}}{2}\right)^4 dx \\
&= \int_0^t \frac{e^{4\imath x}+4e^{3\imath x}e^{-ix}+6e^{2\imath x}e^{-2\imath x}+4e^{\imath x}e^{-3\imath x}+e^{-4\imath x}}{16}dx \\
&= \int_0^t \frac{e^{4\imath x}+e^{-4\imath x}+4(e^{2\imath x}+e^{-2\imath x})+6}{16}dx \\
&= \int_0^t \frac{2\cos(4x)+8\cos(2x)+6}{16}dx \\
&= \frac{\sin(4t)}{32}+\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{3t}{8}\ .
\end{aligned}$$

Fractions rationnelles

Pour trouver des primitives de fractions rationnelles :

Fractions rationnelles

Pour trouver des primitives de fractions rationnelles :

- On commence par décomposer en éléments simples.

Fractions rationnelles

Pour trouver des primitives de fractions rationnelles :

- On commence par décomposer en éléments simples.
- Puis on intègre séparément chacun des éléments simples.

Fractions rationnelles

Un seul type d'élément simple est difficile à intégrer : $\dfrac{1}{P(x)^n}$, où P est un polynôme de degré 2 sans racine réelles.

Fractions rationnelles

Un seul type d'élément simple est difficile à intégrer : $\dfrac{1}{P(x)^n}$, où P est un polynôme de degré 2 sans racine réelles.

On se ramène à $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ par un changement de variables.

Fractions rationnelles

Un seul type d'élément simple est difficile à intégrer : $\dfrac{1}{P(x)^n}$, où P est un polynôme de degré 2 sans racine réelles.

On se ramène à $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ par un changement de variables.

Puis c'est compliqué ; une méthode est de faire baisser le degré en utilisant la relation

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$$

et une intégration par parties (calcul au tableau).

Autre méthode pour intégrer $\frac{1}{(1+x^2)^n}$

On utilise le changement de variables $x = \tan(u)$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^n} dx &= \int_0^{\arctan(t)} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^n}(1+\tan^2(u))du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^{n-1}} du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \cos^{2n-2}(u) du \ .
\end{aligned}$$

Autre méthode pour intégrer $\frac{1}{(1+x^2)^n}$

On utilise le changement de variables $x = \tan(u)$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^n} dx &= \int_0^{\arctan(t)} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^n}(1+\tan^2(u))du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^{n-1}} du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \cos^{2n-2}(u) du \ .
\end{aligned}$$

On est ainsi ramené au calcul d'une primitive de $\cos^{2n-2}$, et on calcule en linéarisant.

Autre méthode pour intégrer $\frac{1}{(1+x^2)^n}$

On utilise le changement de variables $x = \tan(u)$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^n} dx &= \int_0^{\arctan(t)} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^n}(1+\tan^2(u))du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \frac{1}{(1+\tan^2(u))^{n-1}} du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \cos^{2n-2}(u) du \ .
\end{aligned}$$

On est ainsi ramené au calcul d'une primitive de $\cos^{2n-2}$, et on calcule en linéarisant.

Mais il faut savoir simplifier $\cos(\arctan(t))$ et $\sin(\arctan(t))$...

Un exemple

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int_0^{\arctan(t)} \cos^2(u)\,du \\
&= \int_0^{\arctan(t)} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,du \\
&= \frac{\sin(2\arctan(t))}{4} + \frac{\arctan(t)}{2} \\
&= \frac{\sin(\arctan(t))\cos(\arctan(t)) + \arctan(t)}{2} \; .
\end{aligned}
$$

Un exemple

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \int_0^{\arctan(t)} \cos^2(u)du \\ &= \int_0^{\arctan(t)} \frac{\cos(2u)+1}{2}du \\ &= \frac{\sin(2\arctan(t))}{4} + \frac{\arctan(t)}{2} \\ &= \frac{\sin(\arctan(t))\cos(\arctan(t)) + \arctan(t)}{2} \quad .\end{aligned}$$

Finalement, on arrive à

$$\int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan(t)}{2}$$

Fractions rationnelles trigonométriques

Fonctions de la forme $F(t) = \dfrac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))}$ où P et Q sont des polynômes. On peut toujours se ramener à une intégrale de fraction rationnelle, via l'application des **règles de Bioche** :

- Si $F(t)dt$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = -t$ (autrement dit si F est impaire) alors on pose $u = \cos(t)$.

Fractions rationnelles trigonométriques

Fonctions de la forme $F(t) = \dfrac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))}$ où P et Q sont des polynômes. On peut toujours se ramener à une intégrale de fraction rationnelle, via l'application des **règles de Bioche** :

- Si $F(t)dt$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = -t$ (autrement dit si F est impaire) alors on pose $u = \cos(t)$.
- Si $F(t)dt$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = \pi - t$, alors on pose $u = \sin(t)$.

Fractions rationnelles trigonométriques

Fonctions de la forme $F(t) = \dfrac{P(\sin(t), \cos(t))}{Q(\sin(t), \cos(t))}$ où P et Q sont des polynômes. On peut toujours se ramener à une intégrale de fraction rationnelle, via l'application des **règles de Bioche** :

- Si $F(t)dt$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = -t$ (autrement dit si F est impaire) alors on pose $u = \cos(t)$.
- Si $F(t)dt$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = \pi - t$, alors on pose $u = \sin(t)$.
- Si $F(t)$ est laissé inchangé par le changement de variables $u = \pi + t$, alors on pose $u = \tan(t)$ (en se restreignant à un intervalle où ce changement de variables a un sens : il faut que tan soit définie sur tout l'intervalle d'intégration !).

En désespoir de cause...

Si aucun des points précédents n'est vérifié, alors on pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

En désespoir de cause...

Si aucun des points précédents n'est vérifié, alors on pose
$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

Bien sûr, il faut se placer sur un intervalle où le changement de variables a un sens, et se rendre compte que le calcul risque d'être long...

En désespoir de cause...

Si aucun des points précédents n'est vérifié, alors on pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

Bien sûr, il faut se placer sur un intervalle où le changement de variables a un sens, et se rendre compte que le calcul risque d'être long... et on a besoin de savoir exprimer $\sin(t)$ et $\cos(t)$ en fonction de $\tan\left(\frac{t}{2}\right)$

Un exemple

On cherche une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$.

Un exemple

On cherche une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$.

On a $f(\pi + t) = f(t)$, donc le changement de variables $u = \tan(t)$ doit marcher ; supposons par exemple que $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Un exemple

On cherche une primitive de $f: x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$.

On a $f(\pi + t) = f(t)$, donc le changement de variables $u = \tan(t)$ doit marcher ; supposons par exemple que $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} &= \frac{dt}{\cos^4(t)(1+\tan^4(t))} \\
&= \frac{dt}{\cos^2(t)}\,\frac{1}{\cos^2(t)}\,\frac{1}{1+\tan^4(t)} \\
&= \frac{dt}{\cos^2(t)}\,\frac{1+\tan^2(t)}{1+\tan^4(t)} \\
&= \frac{1+u^2}{1+u^4}du
\end{aligned}$$

Suite de la recherche d'une primitive de $\frac{1}{\cos^4(t)+\sin^4(t)}$

$$\int_0^x \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} = \int_0^{\tan(x)} \frac{1+u^2}{1+u^4} du \ .$$

Suite de la recherche d'une primitive de $\frac{1}{\cos^4(t)+\sin^4(t)}$

$$\int_0^x \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} = \int_0^{\tan(x)} \frac{1+u^2}{1+u^4} du \ .$$

Maintenant on décompose en éléments simples :

Suite de la recherche d'une primitive de $\frac{1}{\cos^4(t)+\sin^4(t)}$

$$\int_0^x \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} = \int_0^{\tan(x)} \frac{1+u^2}{1+u^4}du \ .$$

Maintenant on décompose en éléments simples :

$$\begin{aligned}\frac{X^2+1}{X^4+1} &= \frac{X^2+1}{(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)} \\ &= \frac{aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1}\end{aligned}$$

Suite de la recherche d'une primitive de $\frac{1}{\cos^4(t)+\sin^4(t)}$

$$\int_0^x \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} = \int_0^{\tan(x)} \frac{1+u^2}{1+u^4} du \ .$$

Maintenant on décompose en éléments simples :

$$\begin{aligned}\frac{X^2+1}{X^4+1} &= \frac{X^2+1}{(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)} \\ &= \frac{aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1}\end{aligned}$$

Après calcul :

$$\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right)$$

Et ça continue, encore et encore

On écrit :

$$\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1} = \frac{1}{(X+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{1+(\sqrt{2}X+1)^2}$$

Et ça continue, encore et encore

On écrit :

$$\frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1} = \frac{1}{(X+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{1+(\sqrt{2}X+1)^2}$$

Une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1}$ est donc $\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u+1)$; une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}$ est $-\sqrt{2}\arctan(-\sqrt{2}u+1)$.

Tout ça pour ça

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,du \\
&= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u+1)-\sqrt{2}\arctan(-\sqrt{2}u+1)\right]_0^{\tan(x)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan(1+\sqrt{2}\tan(x))-\arctan(1-\sqrt{2}\tan(x))\right)
\end{aligned}
$$

Tout ça pour ça

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1+u^2}{1+u^4}du \\
&= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u+1)-\sqrt{2}\arctan(-\sqrt{2}u+1)\right]_0^{\tan(x)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\arctan(1+\sqrt{2}\tan(x))-\arctan(1-\sqrt{2}\tan(x))\Big)
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de déterminer une primitive de $\frac{1}{\cos^4(t)+\sin^4(t)}$ d'abord sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ puis sur $\mathbb{R}$ tout entier, par π-périodicité.