

---

Analyse 2 : correction de l'examen final

---

**Exercice 1.** *Questions de cours.*

1. Soit  $a < b$  deux réels et  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux. Montrer que  $f$  est bornée.

Par définition, il existe des réels  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  tels que  $f$  coïncide sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  avec une fonction  $f_i$  qui est continue sur  $[a_i, a_{i+1}]$ . Chaque fonction continue sur un segment y est bornée ; on en déduit que pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  il existe  $M_i \geq 0$  tel que  $|f(x)| \leq M_i$  pour tout  $x \in ]a_i, a_{i+1}[$ . On a alors

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i + \sum_{i=0}^n |f(a_i)|$$

On conclut que  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ .

2. Soit  $a < b$  deux réels et  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que  $f$  est à valeurs positives, et que  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Montrer que  $f$  est la fonction nulle.

Supposons que  $f$  est non nulle, continue sur  $[a, b]$  et à valeurs positives. Soit  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) > 0$ . En notant  $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ , le fait que  $f$  soit continue nous garantit qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  on ait  $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ .

Supposons  $x_0 \neq b$  ; alors quitte à réduire  $\delta$  on peut supposer que  $[x_0, x_0 + \delta] \subseteq [a, b]$  et on a alors, par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq \frac{\delta f(x_0)}{2} > 0$$

Le cas où  $x_0 = b$  se traite de manière analogue (par exemple en appliquant le même raisonnement en utilisant l'intervalle  $[x_0 - \delta, x_0]$ ).

On vient de prouver que si  $f$  est non nulle, continue sur  $[a, b]$  et à valeurs positives alors  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , ce qui établit le résultat attendu.

**Exercice 2.**

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante ;

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^t \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{E})$$

On commence par résoudre l'équation homogène : on cherche les racines de  $r^2 + 4r + 5 = 0$ . Puisque  $r^2 + 4r + 5 = (r + 2)^2 + 1$ , il y a deux racines complexes conjuguées, qui sont  $-2 \pm i$ .

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc constitué de toutes les fonctions de la forme  $t \mapsto e^{-2t}(A \cos(t) + B \sin(t))$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$ .

On cherche une solution particulière de l'équation (E) de la forme  $y_\lambda: t \mapsto \lambda e^t$ , et on obtient que  $y_\lambda$  est solution si, et seulement si,  $10\lambda = 1$ , ou encore  $\lambda = \frac{1}{10}$ .

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \frac{1}{10}e^t + Ae^{-2t} \cos(t) + Be^{-2t} \sin(t)$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$ .

2. Déterminer la solution  $y$  de (E) telle que  $y(0) = \frac{1}{10}$  et  $y'(0) = 0$ .

On sait que  $y$  est de la forme  $t \mapsto \frac{1}{10}e^t + Ae^{-2t}\cos(t) + Be^{-2t}\sin(t)$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$  ; il nous reste à déterminer  $A, B$ . En évaluant en 0 on trouve que  $A = 0$ .

On a alors  $y'(t) = \frac{1}{10}e^t - 2Be^{-2t}\sin(t) + Be^{-2t}\cos(t)$ , et en évaluant de nouveau en 0 on obtient que  $B = -\frac{1}{10}$ . Finalement, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \frac{1}{10}e^t - \frac{1}{10}e^{-2t}\sin(t).$$

### Exercice 3.

1. Montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx = \pi - 2$ .

Ci-dessous on intègre deux fois par parties, ce qui est légitime puisque les fonctions polynômes et les fonctions trigonométriques sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx &= \left[ -x^2 \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos(x) dx \\ &= \left[ 2x \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(x) dx \\ &= \pi + \left[ 2 \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi - 2 \end{aligned}$$

2. À l'aide du changement de variable  $x = \ln(t)$ , calculer  $\int_1^2 \frac{1}{2t \ln(t) + t} dt$ .

La fonction  $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et il en va de même de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ . En appliquant la formule de changement de variable avec  $x = \ln(t)$ , on obtient

$$\int_1^2 \frac{1}{2t \ln(t) + t} dt = \int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{2x+1} = \left[ \frac{1}{2} \ln(2x+1) \right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2} \ln(2 \ln(2) + 1)$$

(Ci-dessus on a utilisé deux fois le fait que  $\ln(1) = 0$ )

**Exercice 4.** Dans cet exercice on considère la fraction rationnelle  $F \in \mathbb{R}(X)$  définie par

$$F(X) = \frac{X^3 + 7X^2 - 6X + 6}{X^3 + X^2 - 6X}$$

1. Donner la décomposition en éléments simples de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .

On commence par noter que

$$F(X) = \frac{X^3 + X^2 - 6X + 6X^2 + 6}{X^3 + X^2 - 6X} = 1 + \frac{6(X^2 + 1)}{X^3 + X^2 - 6X}$$

On s'est ramené à une fraction de degré  $-1$  ; ensuite on factorise le dénominateur :

$$X^3 + X^2 - 6X = X(X^2 + X - 6) = X(X - 2)(X + 3)$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, on sait qu'il existe un unique  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\frac{6(X^2 + 1)}{X^3 + X^2 - 6X} = \frac{6(X^2 + 1)}{X(X - 2)(X + 3)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 2} + \frac{c}{X + 3}$$

On a trois pôles simples ; pour trouver  $a, b, c$  on applique la méthode habituelle : en multipliant par  $X$  et en substituant  $X = 0$  on obtient  $a = \frac{6}{-6} = -1$ . De même  $b = \frac{6(4+1)}{2 \times 5} = 3$  ; et  $c = \frac{6(9+1)}{(-3)(-3-2)} = \frac{60}{15} = 4$ . On a obtenu

$$F(X) = 1 - \frac{1}{X} + \frac{3}{X-2} + \frac{4}{X+3}$$

2. Justifier que  $t \mapsto F(t)$  est bien définie sur  $]0, 2[$  et en donner une primitive sur cet intervalle.

Comme le dénominateur de  $F$  ne s'annule pas sur  $]0, 2[$  (ses racines sont 0, 2 et  $-3$ )  $t \mapsto F(t)$  est un quotient de fonctions continues sur  $]0, 2[$  et y est donc continue. Le théorème fondamental de l'analyse nous garantit qu'elle admet une primitive sur cet intervalle, et on obtient en intégrant les éléments simples qu'une primitive de  $F$  sur cet intervalle est

$$t \mapsto t - \ln(t) + 3 \ln(2-t) + 4 \ln(t+3)$$

qu'on peut aussi mettre sous la forme  $t \mapsto t + \ln \left( \frac{(2-t)^3(t+3)^4}{t} \right)$  si on en a envie (mais ce n'est pas une obligation...).

### Exercice 5.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\ln(1 + \sin(x))$ .

On a  $\ln(1 + \sin(x)) = \ln \left( 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)$  ; c'est de la forme  $\ln(1 + u)$  avec  $u$  qui tend vers 0. En 0 on a  $\ln(1 + u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3$ , et on obtient en composant les développements limités que

$$\ln(1 + \sin(x)) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) .$$

Dans la suite de l'exercice, on admet que  $\ln(1 + \sin(x)) \neq -1$  pour tout  $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ .

2. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{1 + \ln(1 + \sin(x))}$ . On calcule (en appliquant la méthode habituelle pour un développement de la forme  $\frac{1}{1+u}$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \ln(1 + \sin(x))} &= \frac{1}{1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \\ &= 1 - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right) + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)^2 - x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

3. On considère  $f: \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{1 + \ln(1 + \sin(x))}$ .

Montrer que la courbe représentative de  $f$  admet en 0 une tangente d'équation  $y = 1 - x$ , puis déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Comme  $f(0) = 1$  et  $f$  admet un développement limité en 0 de la forme  $f(x) = 1 - x + o(x)$ , on sait que la courbe représentative de  $f$  admet en 0 une tangente d'équation  $y = 1 - x$ . La position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0 s'obtient en étudiant le signe de  $f(x) - (1 - x) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ , qui est positif près de 0. Donc la courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

4. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $u_n = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\frac{1}{e}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , puis donner un équivalent simple de  $u_n - \frac{1}{e}$ .

Traisons les deux questions (qui sont nettement plus difficiles que le reste du sujet) en une seule fois, en utilisant un développement à l'ordre 2 de  $f(x)$  au voisinage de 0.

Puisque  $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$  on commence par considérer

$$\begin{aligned}\ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^{-1} \exp\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{ne} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

On vient de montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{1}{e}$ , et que  $u_n - \frac{1}{e} \sim \frac{1}{ne}$ .