Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2024-2025

Cursus préparatoire/CCP, 1ère année — 5 mai

Analyse 2 : examen final (durée 1h30)

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction, le détail des calculs doit apparaître sur la copie et la présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. *Questions de cours.*

1. Soit $a < b$ deux réels et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que f est bornée.
2. Soit $a < b$ deux réels et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est à valeurs positives, et que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 2.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante ;

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^t \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{E}$$

2. Déterminer la solution y de (E) telle que $y(0) = \dfrac{1}{10}$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 3.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\,dx = \pi - 2$.
2. À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2t\ln(t) + t}\,dt$.

Exercice 4. Dans cet exercice on considère la fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ définie par

$$F(X) = \frac{X^3 + 7X^2 - 6X + 6}{X^3 + X^2 - 6X}$$

1. Donner la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $t \mapsto F(t)$ est bien définie sur $]0,2[$ et en donner une primitive sur cet intervalle.

Exercice 5.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + \sin(x))$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $\ln(1 + \sin(x)) \neq -1$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. Donner le développement limité à l'orde 3 en 0 de $\dfrac{1}{1 + \ln(1 + \sin(x))}$.
3. On considère $f\colon \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln(1 + \sin(x))}$.
   Montrer que la courbe représentative de f admet en 0 une tangente d'équation $y = 1 - x$, puis déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$, puis donner un équivalent simple de $u_n - \dfrac{1}{e}$.