Algèbre 2: examen final : correction

Exercice 1. *Question de cours.*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de E et $y \in E$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n, y)$ est liée si, et seulement si, y appartient à $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.
Supposons que $(x_1, \ldots, x_n, y)$ soit liée. Alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda y = 0$. Si $\lambda = 0$, on obtient que $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Donc $\lambda \neq 0$, et on peut écrire $y = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$. Par conséquent, $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Pour prouver l'implication réciproque, supposons que $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Alors on peut trouver $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, ou encore $y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. On vient de trouver une combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n, y$ qui est nulle, et dont au moins un coefficient est non nul (le coefficient de y est égal à 1). Par conséquent la famille $(x_1, \ldots, x_n, y)$ est liée.

Exercice 2. *On note dans cet exercice* $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que P est inversible et calculer son inverse.*
   Il y a beaucoup de façons de prouver cela, par exemple on peut travailler avec la matrice augmentée et des opérations élémentaires sur les lignes. On peut aussi considérer les trois vecteurs $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2$ et $f_3 = e_1 - e_3$ (où e_1, e_2, e_3 désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$) et montrer que cette famille est génératrice (ce qui montrera que P est inversible et nous donnera une formule pour l'inverse). On peut par exemple écrire :
   $$\begin{cases} f_1 & = -2e_1 + e_2 + e_3 \\ f_2 & = e_2 \\ f_3 & = e_1 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 & = -2e_1 + f_2 + e_3 \\ f_2 & = e_2 \\ f_1 + f_3 & = -e_1 + f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 & = -f_1 + f_2 - f_3 \\ e_2 & = f_2 \\ e_3 & = -f_1 + f_2 - 2f_3 \end{cases}$$
   On en conclut à la fois que P est inversible (la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice et de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base) et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ puisque c'est la matrice de passage de (f_1, f_2, f_3) à (e_1, e_2, e_3), qu'on vient de calculer.
2. *Calculer $P^{-1}AP$ (vous devez obtenir une matrice diagonale !).*
   On calcule par exemple d'abord $AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis on multiplie à gauche par P^{-1} pour obtenir $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Bien sûr on aurait aussi pu caluler d'abord $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ puis multiplier à droite par P pour obtenir le même résultat.

3. *Quel est le rang de A ?*

   On vient d'obtenir que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est de rang 3 puisque diagonale à coefficients diagonaux non nuls. Donc A est de rang 3 puisque deux matrices semblables ont le même rang.

Exercice 3. *Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = (-x-3y+z, 3x+8y-2z, -x-4y+2z)$$

1. *Déterminer une base du noyau de f et donner sa dimension.*

   On doit résoudre le système $\begin{cases} -x & -3y & +\ z & = 0 \\ 3x & +8y & -2z & = 0 \\ -x & -4y & +2z & = 0 \end{cases}$. En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, on se ramène à

$$\begin{cases} -x & -3y & +z & = 0 \\ & -\ y & +z & = 0 \\ & -\ y & +z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = z \\ x & = -2y \end{cases}$$

   Le noyau de f est donc l'ensemble $\{(-2y,y,y)\colon y \in \mathbb{R}\}$, autrement dit $\mathrm{Vect}(-2,1,1)$. Donc $\ker(f)$ est de dimension 1.

2. *Donner le rang de f. Est-ce que f est surjective ?*

   Le théorème du rang nous donne $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rang}(f) = 3$, donc f est de rang 2. Par conséquent l'image de f est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$: f n'est pas surjective.

3. *Déterminer une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

   On sait que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 ; de plus, $u = (-1,3,-1) = f(1,0,0)$ et $v = (1,-2,2) = f(0,0,1)$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$ et ne sont pas colinéaires (si on avait $u = \lambda v$ alors, en regardant la première coordonnée, on obtiendrait $\lambda = -1$ puis $-3 = 2$ en regardant la deuxième coordonnée, une contradiction).

   Donc (u,v) est une famille libre à 2 éléments dans $\mathrm{Im}(f)$, qui est de dimension 2 : (u,v) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. *Est-ce que* $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont supplémentaires ?*

   Soit $e \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. À l'aide des résultats des deux questions précédentes, on sait qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $e = (-2y,y,y)$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u + \mu v = (-\lambda+\mu, 3\lambda-2\mu, -\lambda+2\mu)$. On obtient donc

$$\begin{cases} -2y & = -\lambda+\mu \\ y & = 3\lambda-2\mu \\ y & = -\lambda+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y & = -\lambda+\mu \\ 0 & = 5\lambda-3\mu \\ 0 & = 4\lambda+4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda & = -\mu \\ 8\lambda & = 0 \\ y & = \lambda \end{cases}$$

   On en déduit que $y = 0$ donc $e = (0,0,0)$ et on vient de prouver que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Puisque le théorème du rang nous assure que $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rang}(f) = 3$, on en conclut que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 4. *Pour tout $k \in \{0,\dots,3\}$ on pose $P_k = X^k(1-X)^{3-k}$. Montrer que $(P_k)_{0 \le k \le 3}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.*

On peut par exemple écrire que :

$$\begin{aligned} P_0 &= (1-X)^3 = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 \\ P_1 &= X(1-X)^2 = X^3 - 2X^2 + X \\ P_2 &= X^2(1-X) = -X^3 + X^2 \\ P_3 &= X^3 \end{aligned}$$

En écrivant ces polynômes dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, on voit que montrer que $(P_k)_{0\leq k\leq 3}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ revient à prouver que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Cette matrice est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 (et en particulier, sont non nuls). Elle est donc inversible, ce qui nous permet de conclure que $(P_k)_{0\leq k\leq 3}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5. *Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner la formule exprimant $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.*
   On forme le produit de matrice
   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y+2z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$
   On obtient donc que $f(x, y, z) = (2x, x + y + 2z, x + 2y + z)$.
2. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $f_\lambda = f - \lambda\mathrm{id}$. Déterminer pour quelles valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe un vecteur non nul appartenant à $\ker(f_\lambda)$. Pour chacun de ces λ, montrer que $\ker(f_\lambda)$ est de dimension 1 et donner un vecteur v_λ tel que $\ker(f_\lambda) = \mathrm{Vect}(v_\lambda)$.*
   Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit trouver à quelle condition le système $\begin{cases} 2x & = \lambda x \\ x + \ y + 2z & = \lambda y \\ x + 2y + \ z & = \lambda z \end{cases}$ a une solution non nulle.
   Pour $\lambda = 2$ ce système est équivalent à
   $$\begin{cases} x - \ y + 2z = 0 \\ x + 2y - \ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \ y + 2z = 0 \\ \quad 3y - 3z = 0 \end{cases}$$
   Donc $\ker(f_2)$ est de dimension 1, et engendré par le vecteur $(-1, 1, 1)$. On pose $v_2 = (-1, 1, 1)$.
   Pour $\lambda \neq 2$ on obtient $x = 0$, et on doit étudier le système
   $$\begin{cases} (1-\lambda)y + 2z & = 0 \\ 2y + (1-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$
   Si $\lambda = 1$ ce système n'a que $(0, 0)$ comme solution ; sinon, en remplaçant L_2 par $(1 - \lambda)L_2 - 2L_1$ on obtient $((1-\lambda)^2 - 4)z = 0$. On voit que le système aura une solution non nulle si, et seulement si, $(1 - \lambda)^2 - 4 = 0$, autrement dit si et seulement si $1 - \lambda = \pm 2$, ce qui nous donne les solutions $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$.
   Pour $\lambda = -1$ on obtient $y = -z$, et $\ker(f_{-1}) = \mathrm{Vect}(0, 1, -1)$. On pose $v_2 = (0, 1, -1)$.
   Pour $\lambda = 3$ on obtient $y = z$, et $\ker(f_3) = \mathrm{Vect}(0, 1, 1)$. On pose $v_3 = (0, 1, 1)$.
3. *Montrer que la famille de vecteurs obtenue à la question précédente forme une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice D de f dans cette nouvelle base.*
   On forme la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, qui est équivalente en lignes à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est échelonnée à pivots non nuls et par conséquents inversible : on vient de démontrer que (v_2, v_{-1}, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Puisque $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_{-1}) = -v_{-1}$ et $f(v_3) = 3v_3$, la matrice de f dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.