Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire/CCP, 1ère année 7 mai 2025

Algèbre 2 : examen final (durée 1h30)

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction, le détail des calculs doit apparaître sur la copie et la présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. *Question de cours.*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E et $y \in E$. Montrer que $(x_1, \dots, x_n, y)$ est liée si, et seulement si, y appartient à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 2. On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$ (vous devez obtenir une matrice diagonale !).
3. Quel est le rang de A ?

Exercice 3. Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (-x - 3y + z, 3x + 8y - 2z, -x - 4y + 2z)$$

1. Déterminer une base du noyau de f et donner sa dimension.
2. Donner le rang de f. Est-ce que f est surjective ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Est-ce que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires ?

Exercice 4. Pour tout $k \in \{0, \dots, 3\}$ on pose $P_k = X^k(1 - X)^{3-k}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq 3}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5. Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner la formule exprimant $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $f_\lambda = f - \lambda \mathrm{id}$. Déterminer pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe un vecteur non nul appartenant à $\ker(f_\lambda)$. Pour chacun de ces λ, montrer que $\ker(f_\lambda)$ est de dimension 1 et donner un vecteur v_λ tel que $\ker(f_\lambda) = \mathrm{Vect}(v_\lambda)$.
3. Montrer que la famille de vecteurs obtenue à la question précédente forme une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice D de f dans cette nouvelle base.