Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 19 février 2025

Devoir surveillé 1

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1

1. Question de cours : rappeler la définition d'une matrice inversible.
   Solution : Désignons $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ par $\mathbf{K}$.
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbf{K})$ est inversible s'il existe une matrice B de $M_n(\mathbf{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. (Dans ce cas, B s'appelle l'inverse de A et est notée A^{-1}.)
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbf{C})$. Supposons qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $A^k = I_n$. Montrer que A est inversible.
   Solution : Par associativité de la multiplication, on a alors $AA^{k-1} = A^{k-1}A = I_n$. Ainsi, par définition, A est inversible (et $A^{-1} = A^{k-1}$).
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et A, $B \in M_n(\mathbf{C})$ tel que AB est inversible. Montrer que A et B sont également inversibles.
   Solution : Notons C l'inverse de AB. Alors $(CA)B = C(AB) = I_n$. Ainsi, la matrice carrée B a une inverse à gauche et d'après un théorème du cours, elle est inversible d'inverse CA. De manière analogue, comme $A(BC) = (AB)C = I_n$, la matrice carrée A est inversible d'inverse BC.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbf{R})$

1. Calculer A^2 et A^3.
   Solution : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Conjecturer la valeur de A^n pour chaque entier $n \geqslant 1$.
   Solution : Conjecturons que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.
3. Démontrer votre conjecture.
   Solution : Montrons cette conjecture par récurrence :
   - Initialisation : $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} \\ 2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix}$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= AA^n \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1}+2^{n-1} & 2^{n-1}+2^{n-1} \\ 2^{n-1}+2^{n-1} & 2^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{(n+1)-1} & 2^{(n+1)-1} \\ 2^{(n+1)-1} & 2^{(n+1)-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$, ce qui termine cette preuve par récurrence.

Exercice 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbf{R})$

1. Calculer, s'il existe, l'inverse de A.

   Solution : On forme la matrice « augmentée » $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ puis on applique l'algorithme de Gauss pour se ramener à une matrice échelonnée réduite. On commence par échanger les lignes L_1 et L_3 puis on remplace la nouvelle ligne L_1 par son opposée $-L_1$. On continue ensuite l'algorithme comme décrit ci-dessous :

   $$\cdots \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \cdots \underset{L_1 \leftarrow -L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

   $$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right).$$

   On en déduit que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Calculer $(A - I_3)(A - 2I_3)$.

   Solution : $(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. En déduire que $(3I_3 - A)A = 2I_3$.
   Solution : Par 2. on a

   $$0 = (A - I_3)(A - 2I_3) = A^2 - 2A - A + 2I_3 = A^2 - 3A + 2I_3 = (A - 3I_3)A + 2I_3.$$

   Ainsi, $(3I_3 - A)A = 2I_3$.

4. Retrouver le résultat de la première question.

   Solution : Comme $\frac{1}{2}(3I_3 - A)A = I_3$, la matrice carrée A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-3 & -(-2) & -2 \\ -0 & 3-1 & -0 \\ -(-1) & -1 & 3-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^3 + 2}{X^3 + X^2}.$$

Solution : On a $deg(F) = 3 - 3 = 0$ et donc la décomposition en éléments simples de F contient une partie entière non nulle. Notons que $X^3 + 2 = X^3 + X^2 + (-X^2 + 2)$ et donc

$$F(X) = 1 + \frac{-X^2 + 2}{X^3 + X^2} = 1 + \frac{-X^2 + 2}{X^2(X+1)}.$$

D'après le théorème de décomposition en éléments il existe ainsi des uniques réels a,b et c tel que

$$F(X) = 1 + \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{(X+1)}.$$

On multiplie $F(X)$ par X^2 et on évalue en 0 pour obtenir b : on obtient $b = 2$.

On multiplie $F(X)$ par $X + 1$ et on évalue en -1 pour obtenir c : on obtient $c = 1$.

On calcule la limite de $x \mapsto x(F(x) - 1)$ en $+\infty$ et on obtient $-1 = a + c$ et ainsi $a = -2$.

Conclusion :

$$F(X) = 1 - \frac{2}{X} + \frac{2}{X^2} + \frac{1}{(X+1)}.$$