
Devoir surveillé 1

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1

1. Question de cours : rappeler la définition d'une matrice inversible.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbf{C})$. Supposons qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $A^k = I_n$. Montrer que A est inversible.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ tel que AB est inversible. Montrer que A et B sont également inversibles.

Exercice 2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbf{R})$

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Conjecturer la valeur de A^n pour chaque entier $n \geq 1$.
3. Démontrer votre conjecture.

Exercice 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbf{R})$

1. Calculer, s'il existe, l'inverse de A .
2. Calculer $(A - I_3)(A - 2I_3)$.
3. En déduire que $(3I_3 - A)A = 2I_3$.
4. Retrouver le résultat de la première question.

Exercice 4 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^3 + 2}{X^3 + X^2}.$$