Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2

Corrigé du devoir surveillé n°3 du 2 avril 2025

Exercice 1 Soit $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'application définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 0, x + y - z + t, t).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et préciser sa dimension.
4. A-t-on $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbf{R}^4$?

Solution :

1. Soient (x, y, z, t), $(x', y', z', t') \in \mathbf{R}^4$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a
$$\begin{aligned}
&f\big(\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t')\big)\\
&\quad= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')\\
&\quad= \big(\lambda x + x' - (\lambda y + y') + \lambda z + z', 0, \lambda x + x' + \lambda y + y' - (\lambda z + z') + \lambda t + t', \lambda t + t'\big)\\
&\quad= \big(\lambda(x - y + z) + (x' - y' + z'), 0, \lambda(x + y - z + t) + (x' + y' - z' + t'), \lambda t + t'\big)\\
&\quad= \lambda(x - y + z, 0, x + y - z + t, t) + (x' - y' + z', 0, x' + y' - z' + t', t')\\
&\quad= \lambda f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t').
\end{aligned}$$
Donc f est une application linéaire.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. On a
$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f &\iff f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)\\
&\iff (x - y + z, 0, x + y - z + t, t) = (0, 0, 0, 0)\\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0\\ x + y - z + t = 0\\ t = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0\\ x + y - z = 0\\ t = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = 0\\ z = y\\ t = 0 \end{cases}\\
&\iff (x, y, z, t) = (0, y, y, 0) = y(0, 1, 1, 0).
\end{aligned}$$
Donc la famille $\big((0, 1, 1, 0)\big)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$. Cette base comporte 1 élément, donc $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.
3. On a
$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \big\{f(x, y, z, t) : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4\big\}\\
&= \big\{(x - y + z, 0, x + y - z + t, t) : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4\big\}\\
&= \big\{x(1, 0, 1, 0) + y(-1, 0, 1, 0) + z(1, 0, -1, 0) + t(0, 0, 1, 1) : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4\big\}\\
&= \operatorname{Vect}\big\{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1)\big\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\big((1,0,1,0),(-1,0,1,0),(1,0,-1,0),(0,0,1,1)\big)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$. On remarque que $(1,0,-1,0)=-(-1,0,1,0)$, donc la famille composée des trois vecteurs $\big((1,0,1,0),(-1,0,1,0),(0,0,1,1)\big)$ est également génératrice de $\operatorname{Im} f$. Montrons qu'elle est libre. Soient λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,0,1,0)+\lambda_2(-1,0,1,0)+&\lambda_3(0,0,1,1)=(0,0,0,0)\\
&\iff (\lambda_1-\lambda_2,0,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_3)=(0,0,0,0)\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}.
\end{aligned}$$

Cela montre que la famille $\big((1,0,1,0),(-1,0,1,0),(0,0,1,1)\big)$ est libre, et alors c'est une base de $\operatorname{Im} f$. Cette base comporte 3 éléments, donc $\dim \operatorname{Im} f = 3$. Remarque : Par le théorème du rang, on sait que

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbf{R}^4,$$

donc

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4-1=3.$$

Donc à partir du moment où on a montré que la famille $\big((1,0,1,0),(-1,0,1,0),(0,0,1,1)\big)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, on peut dire que c'est une famille génératrice à 3 éléments d'un espace vectoriel de dimension 3, donc que c'en est une base.

4. Soit $(x,y,z,t)\in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. D'une part, $(x,y,z,t)\in \operatorname{Ker} f$, donc par la question 1 il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que
$$(x,y,z,t)=\mu(0,1,1,0)=(0,\mu,\mu,0).$$
D'autre part, $(x,y,z,t)\in \operatorname{Im} f$, donc par la question 2 il existe λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbf{R}$ tels que
$$(x,y,z,t)=\lambda_1(1,0,1,0)+\lambda_2(-1,0,1,0)+\lambda_3(0,0,1,1)=(\lambda_1-\lambda_2,0,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_3).$$
On a donc
$$(0,\mu,\mu,0)=(\lambda_1-\lambda_2,0,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_3).$$
Ainsi,
$$\begin{cases}0=\lambda_1-\lambda_2\\ \mu=0\\ \mu=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ 0=\lambda_3\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=0\\ \mu=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\\ \mu=0\end{cases}.$$
Donc $(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$ et alors $\operatorname{Ker} f\cap \operatorname{Im} f=\{(0,0,0,0)\}=\{0_{\mathbf{R}^4}\}$. De plus, on a
$$\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f = 1+3=4=\dim \mathbf{R}^4.$$
Donc on en conclut que $\operatorname{Ker} f\oplus \operatorname{Im} f=\mathbf{R}^4$.

Exercice 2 Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1. Dans cette question, on considère, pour $n \in \mathbf{N}$, la suite de terme général
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Calculer I_0 et I_1. Ensuite, calculer $I_n + I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (*on pourra effectuer le changement de variable* $u = \tan x$).
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, en déduire qu'elle converge vers une limite ℓ.
   (c) En utilisant la question (a), montrer que cette limite est nulle.
2. Calculer une primitive de la fonction arctangente. (*Faire une intégration par parties*)
3. Calculer la limite suivante
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}.$$

Solution :

1. (a) Tout d'abord,
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$
Ensuite,
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x = \big[-\ln|\cos x|\big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 = \frac{\ln 2}{2}.$$
Pour $n \in \mathbf{N}$, par linéarité de l'intégrale on peut écrire que
$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\big(1+\tan^2(x)\big)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\big[0, \frac{\pi}{4}\big]$, donc on peut poser le changement de variable $u = \tan(x)$ dans cette intégrale, pour lequel $\mathrm{d}u = \big(1+\tan^2(x)\big)\mathrm{d}x$, et on obtient
$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 u^n\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
   (b) Pour tout $x \in \big[0, \frac{\pi}{4}\big]$, on a $\tan(x) \in [0,1]$, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a l'inégalité
$$0 \leq \tan^{n+1}(x) \leq \tan^n(x).$$
Par croissance de l'intégrale, on obtient donc que
$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x,$$
et cela se réécrit exactement $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Cela montre que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle converge vers une limite ℓ.
   (c) Dans la question (a), on a montré que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a l'identité
$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$
Si on fait tendre n vers l'infini dans cette identité, on obtient que
$$\lim_{n\to+\infty} I_n + I_{n+2} = \ell + \ell = 2\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$
donc $\ell = 0$.

2. On cherche à trouver une expression de la fonction donnée, pour $x \in \mathbf{R}$, par

$$\int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t.$$

Fixons $x \in \mathbf{R}$. On va effectuer une intégration par parties où on dérive la fonction $t \longmapsto \arctan(t)$, et on intègre la fonction $t \longmapsto 1$. Pour $t \in [0, x]$, posons

$$u(t) = \arctan(t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = t.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, et pour tout $t \in [0, x]$ on a

$$u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = 1.$$

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t &= \big[t\arctan(t)\big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\big[\ln(1+t^2)\big]_0^x \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

En conclusion, la fonction

$$x \longmapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

est une primitive de la fonction arctangente.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si on factorise par n^2 dans la racine au dénominateur, on peut écrire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}.$$

Ainsi, si on définit la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}},$$

on reconnaît une somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right).$$

La fonction f est une fonction continue, donc intégrable, sur $[0,1]$, donc cette somme converge vers

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = \big[2\sqrt{1+x}\big]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

Pour conclure,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

Exercice 3 On définit les trois ensembles

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - 3z + t = 0\}, \qquad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x = y = z = t\}$$

$$\text{et} \quad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x - y - z = 0 \text{ et } x - z + t = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. On admettra que c'est également le cas pour F et G.
2. Calculer une base de E, de F et de G. Quelles sont leurs dimensions ?
3. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.
4. (a) Montrer que F et G sont en somme directe. En déduire une base de $F \oplus G$.
   (b) Trouver un espace vectoriel H de $\mathbf{R}^4$ qui est un supplémentaire de $F \oplus G$. *Indication : on pourra chercher un vecteur v qui complète la base de $F \oplus G$ en une base de $\mathbf{R}^4$, et prendre $H = \mathrm{Vect}\{v\}$.*
5. Trouver une base de $E \cap G$ et déterminer sa dimension. En déduire que $E + G = \mathbf{R}^4$.

Solution :

1. Clairement, $0 \in E$ donc E est non vide. Soient $u = (x,y,z,t), v = (x',y',z',t') \in E$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

   $$(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') - 3(z + \lambda z') + (t + \lambda t') = (x + 2y - 3z + t) + \lambda(x' + 2y' - 3z' + t') = 0$$

   car u et v sont dans E. Cela montre que $u + \lambda v \in E$ et alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

   $$\begin{aligned} u \in E &\iff x = -2y + 3z - t \\ &\iff u = (-2y + 3z - t, y, z, t) \\ &\iff u = y(-2,1,0,0) + z(3,0,1,0) + t(-1,0,0,1) \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}\{(-2,1,0,0),(3,0,1,0),(-1,0,0,1)\} \end{aligned}$$

   Donc $E = \mathrm{Vect}\{(-2,1,0,0),(3,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$. Montrons que ces trois vecteurs forment une famille libre. Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tels que

   $$a_1(-2,1,0,0) + a_2(3,0,1,0) + a_3(-1,0,0,1) = 0.$$

   Alors

   $$(-2a_1 + 3a_2 - a_3, a_1, a_2, a_3) = (0,0,0,0)$$

   donc $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et la famille $((-2,1,0,0),(3,0,1,0),(-1,0,0,1))$ est bien libre. Par conséquent, c'est une base de E qui est alors de dimension 3. De même,

   $$\begin{aligned} u \in F &\iff x = y = z = t \\ &\iff u = (x,x,x,x) \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}\{(1,1,1,1)\} \end{aligned}$$

   Donc $\big((1,1,1,1)\big)$ est une base de F qui est de dimension 1. Enfin,

   $$\begin{aligned} u \in G &\iff x = y + z \text{ et } x = z - t \\ &\iff x = z - t \text{ et } y = -t \\ &\iff u = (z - t, -t, z, t) \\ &\iff u = z(1,0,1,0) + t(-1,-1,0,1) \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}\{(1,0,1,0),(-1,-1,0,1)\} \end{aligned}$$

   donc $G = \mathrm{Vect}\{(1,0,1,0),(-1,-1,0,1)\}$. Les vecteurs $\big((1,0,1,0),(-1,-1,0,1)\big)$ ne sont clairement pas colinéaires, donc ils forment une famille libre, qui est donc une base de G. Par conséquent, G est de dimension 2.

3. Soit $u=(x,y,z,t)\in E\cap F$. Comme $u\in F$, on a $x=y=z=t$, et le fait que $u\in E$ donne $x+2x-3x+x=0$ soit $x=0$ donc $u=0$. On en conclut que $E\cap F=\{0\}$. Mais d'après la question précédente, on a également

$$\dim E+\dim F=3+1=4=\dim \mathbf{R}^4$$

donc en déduit que $E\oplus F=\mathbf{R}^4$.

4. (a) Soit $u=(x,y,z,t)\in F\cap G$. On a $u\in F$ donc $u=(x,x,x,x)$. Or, $u\in G$ donne $x=x+x=2x$ donc $x=0$ et alors $F\cap G=\{0\}$: ils sont en somme directe. On a déterminé à la question une base de F et une base de G, alors on obtient directement une base $F\oplus G$ en concaténant ces deux bases : la famille $\big((1,1,1,1),(1,0,1,0),(-1,-1,0,1)\big)$ est une base de $F\oplus G$.

   (b) On note (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On prend $v=e_4$, et $H=\mathrm{Vect}\{v\}$. On note $U=(F\oplus G)+H$. Remarquons que

$$e_2=(0,1,0,0)=(1,1,1,1)-(1,0,1,0)-(0,0,0,1)\in U,$$

   d'où

$$e_1=(0,1,0,0)-(0,0,0,1)-(-1,-1,0,1)\in U,$$

   et enfin

$$e_3=(1,1,1,1)-e_1-e_2-e_4\in U.$$

   Ainsi $\mathbb{R}^4=\mathrm{Vect}\{e_1,e_2,e_3,e_4\}\subset U$ d'où $U=\mathbb{R}^4$. Or, d'après la formule de Grassmann

$$\dim\mathbb{R}^4=\dim\big((F\oplus G)+H\big)=\dim(F\oplus G)+\dim(H)-\dim\big((F\oplus G)\cap H\big)$$

   Alors

$$4=\dim(F)+\dim(G)+\dim(H)-\dim\big((F\oplus G)\cap H\big)$$

   et $4=2+1+1-\dim\big((F\oplus G)\cap H\big)$ ce qui implique $\dim\big((F\oplus G)\cap H\big)=0$ et $(F\oplus G)\cap H=\{0\}$. Donc H est un supplémentaire de $F\oplus G$ dans $\mathbb{R}^4$.

   (c) Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}
u\in E\cap G &\iff \begin{cases} x+2y-3z+t=0\\ x-y-z=0\\ x-z+t=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=-2t\\ y=-t\\ z=-t\end{cases}\\
&\iff u=(-2t,-t,-t,t)=-t(2,1,1,-1)\\
&\iff u\in\mathrm{Vect}\,\big\{(2,1,1,-1)\big\}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, $E\cap G=\mathrm{Vect}\,\big\{(2,1,1,-1)\big\}$ est de dimension 1. Enfin, d'après la formule de Grassmann,

$$\dim(E+G)=\dim E+\dim G-\dim E\cap G=3+2-1=4=\dim\mathbf{R}^4.$$

   On en conclut que $E+G=\mathbf{R}^4$.