

Exercice 1:

$$1) \text{ On a } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o_{u \rightarrow 0}(u^4).$$

En composant $u = -x^2$, on a $u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

$$\text{On a } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1-x^2)}{\sin(x)} &= \frac{-x^2 - \frac{x^4}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)} \\ &= \frac{-x - \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o_{u \rightarrow 0}(u^3).$$

En composant $u = +\frac{x^2}{6} - o_{x \rightarrow 0}(x^3)$, on a $u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3). \text{ Il suit}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1-x^2)}{\sin x} &= \left(-x - \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \\ &= -x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= -x - \frac{2}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3). \end{aligned}$$

2) On a $\sqrt{x} = \sqrt{2 + x - 2}$

$$= \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{x-2}{2}}$$

(2)

avec $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{u^2}{2}$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{u^3}{6} + o(u^3)_{u \rightarrow 0}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)_{u \rightarrow 0}$$

En composant $u = \frac{x-2}{2}$, on a $u \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0$, donc

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{32}(x-2)^2 + \frac{1}{128}(x-2)^3 + o((x-2)^3)_{x \rightarrow 2} \right)$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + o((x-2)^3)_{x \rightarrow 2}$$

Exercise 2:

1) On a $\text{Mat}_B u = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} =: M$.

2) On a $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=X} \in \text{Ker } M \Leftrightarrow M X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$
 $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $L_2 \leftarrow L_2/3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $\text{Ker } M = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Il suit qu'une base de $\ker u$ est

(3)

$(-2e_1 + e_3)$. u n'est pas injectif car $\ker u \neq \{0_E\}$. Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, u n'est pas surjectif.

3) Par le théorème du rang, on a
 $3 = \dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u$,

donc $\operatorname{rg} u = 2$. Les vecteurs

$$\frac{1}{2} u(e_1) = -e_1 + e_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} u(e_2) = e_2$$

sont dans $\operatorname{Im} u$. Ils sont linéairement indépendants car non colinéaires, donc une base de $\operatorname{Im} u$ est
 $(-e_1 + e_3, e_2)$.

4) Par le théorème du rang, on a
 $\dim E = \dim \ker u \oplus \dim \operatorname{Im} u$.

Il nous suffit donc de montrer que
 $\ker u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$, ou
de manière équivalente, que la famille

$$\underbrace{(-2e_1 + e_3)}_{\text{base de } \ker u}, \underbrace{(-e_1 + e_3, e_2)}_{\text{base de } \operatorname{Im} u} \text{ est libre.}$$

Échelonnons en ligne la matrice des coordonnées

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a 3 pivots non nuls
donc est inversible

et les vecteurs $(-2e_1 + e_3, -e_1 + e_3, e_2)$
forment une famille libre.

Ainsi: $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 3:

On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3).$$

En posant $u = -x^2$, on a $u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \cos x - \sqrt{1-x^2} &= \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\ &= \frac{1}{6}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

On a $\sin x \sim_{x \rightarrow 0} x$ donc $\sin^4 x \sim_{x \rightarrow 0} x^4$

$$\text{et } \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\sin x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^4}{x^4} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}.$$

La limite cherchée est $1/6$.

Exercice 4:

1) On a $X^2+1 \in F$ donc F est non vide.

Soit $(P_1, P_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que
 $P_1 + \lambda P_2 \in F$.

Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P_1 = (x^2+1)Q_1 \text{ et } P_2 = (x^2+1)Q_2.$$

(5)

Comme E est un $\mathbb{R}$ -ev, on a $P_1 + \lambda P_2 \in E$

$$\begin{aligned} \text{et } P_1 + \lambda P_2 &= (x^2+1)Q_1 + \lambda(x^2+1)Q_2 \\ &= (x^2+1)(Q_1 + \lambda Q_2) \end{aligned}$$

comme $Q_1 + \lambda Q_2 \in \mathbb{R}[x]$, donc $P_1 + \lambda P_2 \in F$.

Pour $i \in [0, m-2]$, on pose $e_i = (x^2+1)x^i \in E$.

Soit $P \in F$ et $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$P = (x^2+1)Q.$$

Comme $\deg P \leq m$, on a $\deg Q \leq m-2$ et

il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-2}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ tel que

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{m-2} X^{m-2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} P &= \alpha_0(x^2+1) + \alpha_1(x^2+1)X + \dots + \alpha_{m-2}(x^2+1)X^{m-2} \\ &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{m-2} e_{m-2}. \end{aligned}$$

Donc $F \subseteq \text{Vect}(e_0, \dots, e_{m-2})$

Comme, $\forall i \in [0, m-2]$, $\deg(e_i) \leq m$, on a $e_i \in F$

et $F = \text{Vect}(e_0, \dots, e_{m-2})$.

Montrons que la famille $(e_0, \dots, e_{m-2})$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-2}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ tel que

$$\alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_{m-2} e_{m-2} = 0.$$

$$\text{Alors } (x^2+1)(\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{m-2} X^{m-2}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{m-2} X^{m-2} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{m-2} = 0.$$

Donc une base de F est $(e_0, \dots, e_{m-2})$ et

$$\dim F = m-1.$$

2) Montrons que $F \cap H = \{0_E\}$. Soit $P \in F \cap H$.

Comme $P \in H$, on a $\deg P \leq 1$.

(6)

Comme $P \in F$, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P = (x^2+1)Q$. Si $Q \neq 0$, alors $\deg P \geq 2$, ce qui est impossible. Ainsi: $Q = 0$ et $P = 0$.

On a donc une somme directe $F \oplus H$.

Comme $(1, X)$ est libre, on a $\dim H = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } \dim F + \dim H &= n-1 + 2 \\ &= n+1 = \dim E \end{aligned}$$

Donc $E = F \oplus H$.

3) On a $P \in \ker f \Leftrightarrow P(i) = 0$.

Soit $P \in E$. D'après 2) il existe d'unique

$Q \in \mathbb{R}[x]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$P = (x^2+1)Q + aX + b.$$

On a alors $P \in \ker f \Leftrightarrow (i^2+1)Q(i) + ai + b = 0$

$$\Leftrightarrow ai + b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = 0$$

$$\Leftrightarrow P \in F.$$

On a donc $\ker f = F$.

Par le théorème du rang, on a

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

$$\Rightarrow n+1 = n-1 + \dim \operatorname{Im} f$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2.$$

Donc $\operatorname{rg} f = 2$. Comme $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{C}$ et

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2, \text{ on a } \operatorname{Im} f = \mathbb{C}.$$