Devoir Surveillé 2 : Algèbre et Analyse, L1-Cursus Préparatoire 2024-2025

27 mars 2025

Énoncé

Exercice 1. Soient $u = (2, 1, 4), v = (1, 2, 3), w = (0, 3, 2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. Expliciter une base de $F = \text{Vect}(u, v, w) \subset \mathbb{R}^3$ et en déduire la dimension de F.
3. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 2y - 3z = 0\}$
4. Soit $f = (1, -1, 1)$ et $g = (4, 5, 10)$, Montrer que $F = \text{Vect}(f, g)$
5. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$, Calculer $F \cap G$ et en donner une base.

Exercice 2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0\}$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que tout polynome $P \in \mathbb{R}_3[X]$ peut s'écrire de la forme
$$P = S + a \text{ avec } S \in F \text{ et } a \in \mathbb{R}.$$
3. Montrer que $F = \{(X - 1)Q : Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$ et en déduire une famille génératrice de F.
4. Donner une base de $F \subset \mathbb{R}_3[X]$. (On justifiera que la famille proposée est bien une base.)
5. Soient $P_1 = X(X - 1)$, $P_2 = X(X - 2)$, $P_3 = (X - 1)(X - 2)$, $P_4 = X(X - 1)(X - 2)$. Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3. On considère les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$f_1 : x \to \frac{2}{x - 1}, \quad f_2 : x \to \frac{3}{x + 1} \quad \text{et} \quad f_3 : x \to \frac{1}{x^2 - 1}.$$

1. La famille (f_1, f_2, f_3) forme-t-elle une famille libre ?
2. Calculer
$$S = \sum_{k=2}^{100} \frac{2}{k^2 - 1}$$

Exercice 4. .

1. Préciser pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ l'intégrale suivante a un sens et la calculer
$$I_1 = \int_a^b \frac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx,$$
2. Calculer l'intégrale suivante. (On pourra commencer par poser $u = x^2$.)
$$I_2 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$$

Correction

Solution 1. .

1. On a $u - 2v + w = 0$. Donc la famille est liée.
2. Comme $w = 2v - u$, $F = \text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$. Les vecteurs u, v ne sont pas colinéaires et forment donc une base de F. On a alors $\dim F = 2$..
3. Notons $F' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 2y - 3z = 0\}$.
   (a) (Méthode 1) On a $u \in F'$ car $2 \times 5 + 2 - 3 \times 4 = 0$ et $v \in F'$ car $5 + 2 \times 2 - 3 \times 3 = 0$ et donc $F = \text{Vect}(u, v) \subset F'$. On a alors $\dim F' \geq 2$ et aussi $F' \neq \mathbb{R}^3$ car $(1, 0, 0) \notin F'$ donc $\dim F' < 3$. On en déduit que $\dim F' = 2 = \dim F$ et $F \subset F'$ et donc $F = F'$.
   (b) (Méthode 2)
$$F = \text{Vect}(v, w) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\5/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2/3\end{pmatrix}\right)$$
   Donc
$$\begin{aligned} F &= \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\5/3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\2/3\end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\(5/3)x + (2/3)y\end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 3z = 5x + 2y \right\} \end{aligned}$$
4. .
   (a) (Méthode 1) On a $f \in F$ car $5 - 2 + 3 = 0$ et $g \in F$ car $5 \times 4 + 2 \times 5 - 3 \times 10 = 0$ et donc $\text{Vect}(f, g) \subset F$. Les vecteurs f, g ne sont pas colinéaires et forment donc une base. On en déduit que $\dim \text{Vect}(f, g) = 2 = \dim F$ et donc $\text{Vect}(f, g) = F$.
   (b) (Méthode 2) Montrons que $\text{Vect}(f, g) = \text{Vect}\,(v, w)$
$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\10\end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\9\\6\end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right)$$
5. On calcul
$$(x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y - 3z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 7y + 7z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = z \end{cases}$$
   Donc
$$F \cap G = \{(z, -z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1, 1))$$
   Le vecteur $(1, -1, 1)$ forme une base de $F \cap G$.

Solution 2. .

1. On vérifie les hypothèses d'un s.e.v
   — Pour $P_0 = 0$ le polynome nul. On a $P_0(1) = 0$ et donc $P_0 \in F$.
   — Soit $P, Q \in F$, alors $(P + Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0 + 0 = 0$. Donc $P + Q \in F$.
   — Soit $P \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda \times 0 = 0$. Donc $\lambda P \in F$.
2. On a
$$P = (P - P(1)) + P(1) = S + a$$
   avec $a = P(1) \in \mathbb{R}$ et $S = P - P(1)$. On vérifie que $S(1) = P(1) - P(1) = 0$ et donc $S \in F$.

3. Par double inclusion :
   — Soit $P = (X-1)Q$ alors $\deg P = 1 + \deg Q \leq 1 + 2 = 3$ et $P(1) = 0 \times Q(1) = 0$ donc $P \in F$ et on en déduit que $\{(X-1)Q : Q \in \mathbb{R}_2[X]\} \subset F$.
   — Soit $P \in F$, alors 1 est racine de P et on peut factoriser le polynome $P = (X-1)Q$ avec $\deg Q = \deg P - 1 \leq 3 - 1 = 2$ donc $P \in \{(X-1)Q : Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. On en déduit que $F \subset \{(X-1)Q : Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$.

   On en déduit que
   $$\begin{aligned} F &= \{(X-1)(aX^2 + bX + c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aX^2(X-1) + bX(X-1) + c(X-1) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(X^2(X-1), X(X-1), X-1)) \end{aligned}$$
   La famille $X^2(X-1), X(X-1), (X-1)$ est génératrice de F.
4. .
   (a) (Méthode 1) La famille $X^2(X-1), X(X-1), (X-1)$ est libre car tous les degrés des polynomes sont différents (donc sont échelonné dans la base $1, X, X^2, X^3$). C'est donc une base de F.
   (b) (Méthode 2) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. tel que $\lambda_3 X^2(X-1) + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_1(X-1) = 0$. Alors
   $$\begin{cases} -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
   La famille est libre, c'est donc une base de F.
5. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$. Alors
   $$\begin{aligned} &\text{Pour } X = 0 : \\ &\lambda_1 P_1(0) + \lambda_2 P_2(0) + \lambda_3 P_3(0) + \lambda_4 P_4(0) = 0 + 0 + 2\lambda_3 + 0 = 0 && \Rightarrow \lambda_3 = 0 \\ &\text{Pour } X = 1 : \\ &\lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1) + \lambda_3 P_3(1) + \lambda_4 P_4(1) = 0 - \lambda_2 + 0 + 0 = 0 && \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ &\text{Pour } X = 2 : \\ &\lambda_1 P_1(2) + \lambda_2 P_2(2) + \lambda_3 P_3(2) + \lambda_4 P_4(2) = 2\lambda_1 + 0 + 0 + 0 = 0 && \Rightarrow \lambda_1 = 0 \end{aligned}$$
   et finalement $\lambda_4 P_4 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$. Donc la famille est libre et elle a $4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$ éléments. C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution 3. .

1. En décomposant en éléments simples, on a
   $$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{x-1} - \frac{1}{6} \times \frac{3}{x+1}$$
   Donc $f_3 = \frac{1}{4} f_1 - \frac{1}{6} f_2$ et la famille est donc liée.
2. On décompose en éléments simples et on reconnait une somme télescopique.
   $$S = \sum_{k=2}^{100} \frac{2}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{101} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} - \frac{1}{101}.$$

Solution 4. .

1. On remarque que ± 1 sont racines du dénominateur. L'intégrale n'a donc un sens que si $\pm 1 \notin [a, b]$. On peut factoriser la fraction

$$\frac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x(x+1)}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

alors (méthode 1) on reconnait la primitive

$$I_1 = \int_a^b \frac{x}{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2}\log(|x^2 - 1|)\right]_a^b$$

(méthode 2) on décompose en éléments simple

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1}$$

et alors

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\left[\log(|x-1|)\right]_a^b + \frac{1}{2}\left[\log(|x+1|)\right]_a^b$$

2. Avec le changement de variables $u = x^2$, $du = 2xdx$, $x = 0 \Leftrightarrow u = 0$, $x = 1 \Leftrightarrow u = 1$

$$\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{-x^2} 2xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 ue^{-u} du$$

On fait une intégration par partie

$$\int_0^1 ue^{-u} du = [-ue^{-u}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-u}) du = [-ue^{-u}]_0^1 - [e^{-u}]_0^1 = 1 - 2e^{-1}$$

Donc $I_2 = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-1}) = \frac{1}{2} - e^{-1}$.