
Feuille n° 10
Équations différentielles

Exercice 1 Résoudre sur \mathbf{R} les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2 \sin x$
3. $y' - y = (x + 1)e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' - y = x^k e^x$ sur \mathbf{R} , avec $k \in \mathbf{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 3 (*) On considère l'équation différentielle (E) $x^2 y' + y = 2x^3 + x^2 + 2$ sur \mathbf{R} .

1. Chercher une solution particulière polynomiale de (E).
2. Résoudre (E) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.
3. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur \mathbf{R} ?

Exercice 4 Reprendre les questions de l'exercice précédent avec l'équation (E) $2xy' - 3y = x - 1$.

Exercice 5 Résoudre, en $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable deux fois, les équations différentielles suivantes.

- (a) $f'' - 3f' + 2f = 0$
- (b) $f'' + 4f = 0$
- (c) $f'' + 2f' + 2f = 0$ (*)
- (d) $f'' + 2f' + f = t$
- (e) $f'' + f' - 2f = e^t$ (*)
- (f) $f'' + 2f' + 2f = \sin t$ (*)
- (g) $f'' + f = 1 + \cos(2t)$
- (h) $f'' + f' + f = te^t$.

Pour les équations (a), (b) et (h), donner la solution qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 6 (*) Déterminer les fonctions $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 7 Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbf{R}$ pour lesquelles le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} f''(t) + \lambda f(t) = 0, & t \in \mathbf{R}, \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

admet des solutions $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ non identiquement nulles et calculer ces solutions.

Exercice 8 Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, f''(t) + f(t) = \tan t. \quad (1)$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2\left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right)$.

(a) Justifier qu'il existe $u \in \mathcal{C}^2\left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right)$ tel que pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $f(t) = \cos t u(t)$.

(b) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si u est solution de

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \cos t u''(t) - 2 \sin t u'(t) = \tan t. \quad (2)$$

2. Résoudre, en $v: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbf{R}$ dérivable, l'équation différentielle

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \cos t v'(t) - 2 \sin t v(t) = \tan t.$$

3. En utilisant le changement de variable $x = \sin t$, déterminer les primitives de $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

4. Résoudre, en $f: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbf{R}$, l'équation différentielle (1).

Exercice 9 (*) Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur \mathbf{R} telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = f(2 - x)$$

Le saviez-vous ? Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité (en un certain sens) d'une solution à l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ vérifiant une condition initiale donnée, pourvu que certaines conditions sur f soient vérifiées. On doit à Augustin Louis Cauchy (1789-1857) une première version de ce théorème vers 1820, qui fut raffiné par Rudolf Lipschitz (1832-1903) en 1868.