Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire : algèbre 2, analyse 2

Feuille n° 8 : Développements limités, équivalents, formules de Taylor

---

Exercice 1 Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
2. $x \mapsto \ln x$ au voisinage de 1. En déduire $\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$.
3. $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ au voisinage de 2.
4. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ au voisinage de 0.

Exercice 2 Soit $a > 0$.

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0, a]$. Montrer que l'on a :
$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$
2. En déduire l'encadrement :
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 3 (∗) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ entre 25 et 26. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 4 (∗) Soit $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbf{R}$ et on note $M_0 = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, tout $h > 0$, on a
$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$
2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbf{R}$ et que
$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 5 On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f(x) = x^4 + x^3 - x,\ g(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + 1,\ h(x) = (x-1)^3.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f et de h.
4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f + g$.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de fg.
6. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{g}$.

Exercice 6 Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de 0, et quatre fois dérivables au voisinage de 0 dont les développements limités en 0 à l'ordre 4 sont donnés par
$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4),$$
$$g(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4).$$

1. Donner les valeurs de $g''(0)$ et $f^{(4)}(0)$.
2. Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

(a) fg à l'ordre 3,
(b) $\dfrac{g}{f}$ à l'ordre 3,
(c) $f \circ g$ à l'ordre 2,
(d) $\ln f$ à l'ordre 2,
(e) la primitive de f qui vaut 1 en 0, à l'ordre 4.

Exercice 7 On pose $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$. Donner un équivalent simple de f lorsque x tend vers 0, $+\infty$, 2, et 1.

Exercice 8 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

1. $f_1(x) = x + \cos x$,
2. $f_2(x) = x^2 + \sin x$,
3. $f_3(x) = \operatorname{sh} x$,
4. $f_4(x) = x + \sin x$,
5. $f_5(x) = \sqrt{x} + \ln x$,
6. $f_6(x) = xe^x$,
7. $f_7(x) = x^4 + e^x$,
8. $f_8(x) = e^{2x} - \sqrt{x}$,
9. $f_9(x) = \operatorname{ch} x$.

Exercice 9 Étudier la limite de f en a lorsque

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{2x(x-3)}$ et $a = +\infty$,
(b) $f(x) = (\pi - 2x)\tan(x)$ et $a = \dfrac{\pi}{2}$,
(c) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x^3+2x^2} - \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^4+x^3}}$ et $a = +\infty$,
(d) $f(x) = \dfrac{x^2+3\ln(x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$ et $a = +\infty$,
(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$ et $a = e$.

Exercice 10 Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

(a) $f(x) = e^{-x}$ et $n = 5$,

(b) $f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh} x)$ et $n = 4$,

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ et $n = 3$,

(d) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ et $n = 2$,

(e) $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ et $n = 3$,

(f) $f(x) = \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ et $n = 4$,

(g) $(*)$ $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et $n = 6$,

(h) $(*)$ $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ et $n = 7$,

(i) $(*)$ $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$ et $n = 4$,

(j) $(*)$ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et $n = 3$,

(k) $(*)$ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ et $n = 3$.

Exercice 11 Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}^*$

(f) $(*)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

(g) $(*)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

(h) $(*)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$.

Exercice 12 $(*)$ On définit les fonctions

$$f\colon x \in \left]-1, 1\right[\mapsto \ln(1 - x^2) \text{ et } g\colon x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1\,.$$

1. Déterminer les développements limités de f et de g à l'ordre 5 quand $x \to 0$.
2. En déduire l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \left]-\eta; 0\right[\cup \left]0; \eta\right[$,

$$f(x) < g(x)\,.$$

Exercice 13 On considère la fonction $f\colon x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\} \mapsto \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite de l'exercice, on notera encore f la fonction ainsi prolongée.
3. Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 ?
4. Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette tangente ?

Exercice 14 Calculer un développement limité ou asymptotique de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{2 + x}$ en 0, à l'ordre 3,
2. $f(x) = \ln(\sin x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$, à l'ordre 3,
3. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs,
4. $(*)$ $f(x) = x^2 \ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5,
5. $(*)$ $f(x) = \ln(2 + x)$ en 0, à l'ordre 2,
6. $(*)$ $f(x) = \sin x$ en $\dfrac{\pi}{4}$, à l'ordre 3,
7. $(*)$ $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 15 Calculer les limites des suites de terme général

1. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$
2. $u_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}$
3. $u_n = (\sin \frac{1}{n})^{1/n}$
4. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

Exercice 16

1. Trouver un équivalent simple pour les suites définies par

$$u_n = \sin \frac{1}{n+1} \text{ et } v_n = \ln \sin \frac{1}{n}\,.$$

2. Trouver un développement asymptotique à la précision $1/n^2$ des suites données par

$$u_n = \ln(n + 1) \text{ et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Donner aussi un développement à la précision $1/n$ de la suite donnée par

$$w_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\,.$$

Le saviez-vous ? On dit usuellement que o, O et $\sim$ sont les « notations de Landau », du nom du mathématicien allemand Edmund Landau (1877-1938). Elles ont été systématisées dans un livre de 1909 que ce dernier a écrit sur la répartition des nombres premiers. Un des résultats les plus célèbres sur ce sujet est que si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à un réel x, alors

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

C'est ce qu'on appelle le « théorème des nombres premiers », démontré indépendamment par Jacques Hadamard et Charles-Jean de la Vallée Poussin en 1896.