

Feuille n° 4 : Espaces vectoriels

**Exercice 1** Parmi ces sous-ensembles de  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$ , lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 0\}$ .
2. L'ensemble  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$ .
3. L'ensemble  $D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0\}$ .
4. L'ensemble  $D_4 = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbf{R}\}$ .
5. L'ensemble  $D_5 = (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+) \cup (\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^-)$ .
6. L'ensemble  $D_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0\}$ .
7. L'ensemble  $D_7 = \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}\}$ .
8. L'ensemble  $D_8 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : xy + yz + z + x = 0\}$ .
9. L'ensemble  $D_9 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$ .
10. L'ensemble  $D_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0\}$ .

**Exercice 2** Soient  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$  et  $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^3$ .
2. Déterminer  $F \cap G$ .

**Exercice 3** Soient  $A \in M_3(\mathbf{C})$  et  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

Montrer que  $F = \{X \in M_{3,1}(\mathbf{C}) \mid AX = \lambda X\}$  et  $G = \{M \in M_3(\mathbf{C}) \mid A^2M = MA\}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $M_{3,1}(\mathbf{C})$  et de  $M_3(\mathbf{C})$ , respectivement.

**Exercice 4** Soit  $q \in \mathbf{R}$ . Montrer que l'ensemble des suites géométriques réelles de raison  $q$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ . Même question avec  $F = \{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n\}$ .

**Exercice 5** Soit  $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$  l'espace des applications de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}$ .

1. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel usuelle sur  $E$ .
2. Les sous-ensembles suivants de  $E$  en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
  - (a) L'ensemble des applications continues.
  - (b) L'ensemble des applications qui valent 0 en 0.
  - (c) L'ensemble des applications qui valent 1 en 0.
  - (d) L'ensemble des applications qui valent 0 en 1.
  - (e) L'ensemble des applications linéaires.
  - (f) L'ensemble des applications surjectives.
  - (g) L'ensemble des applications  $f$  telles que  $f^{-1}(\mathbf{R}^*)$  est fini (ou vide).

**Exercice 6**

1. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
2. Donner un exemple d'entier  $n$  et de deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^n$  dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ .
3. Soit  $n \in \mathbf{N}$ , et soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^n$  tels que  $F \cup G$  soit un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**Exercice 7 (\*)** Soient  $F, G, H$  trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que  $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$ , et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que  $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + (F \cap H))$ .

**Exercice 8** Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. Dans  $\mathbf{R}^2$  : (a)  $((3, 2), (4, -1))$  ; (b)  $((3, 2), (4, -1), (5, -2))$ .
2. Dans  $\mathbf{R}^3$  : (a)  $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$  ; (b)  $((1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1))$ .

**Exercice 9** Pour quels  $\alpha \in \mathbf{R}$  la famille  $((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha))$  est-elle libre dans  $\mathbf{R}^4$  ?

**Exercice 10** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $e, f, g$  trois vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ . On pose  $u = e + f$ ,  $v = e + g$  et  $w = f + g$ .

1. Montrer que la famille  $(e, f, g)$  est libre si et seulement si la famille  $(u, v, w)$  est libre.
2. Montrer que le sous-espace engendré par  $(e, f, g)$  est égal au sous-espace engendré par  $(u, v, w)$ .

**Exercice 11** Dans  $\mathbf{R}^3$ , on considère les vecteurs  $u = (1, -1, 1)$ ,  $v = (0, -1, 2)$  et  $w = (1, -2, 3)$ .

1. La famille  $(u, v, w)$  est-elle libre ?
2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(u, v, w)$ . Donner une base de  $F$ .
3. Soit  $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ . Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$ , puis que  $F = G$ .

**Exercice 12** Montrer que les familles de vecteurs  $(u_1, u_2, u_3) = ((1, 2, -1, 3), (2, 4, 1, -2), (3, 6, 3, -7))$  et  $(v_1, v_2) = ((1, 2, -4, 11), (2, 4, -5, 14))$  engendrent le même sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$ .

**Exercice 13 (\*)** Dans  $\mathbf{R}^4$ , on considère la famille  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  formée des vecteurs  $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $v_3 = (3, 1, 4, 2)$ ,  $v_4 = (10, 4, 13, 7)$  et  $v_5 = (1, 7, 8, 14)$ . Cette famille est-elle libre ? Sinon, en extraire une sous-famille libre engendrant le même sous-espace vectoriel qu'elle.

**Exercice 14 (\*)** Soit  $n \in \mathbf{N}$  et soient  $e_1, \dots, e_k$  des vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ . On note  $\Phi$  l'application

$$\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^k & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) & \longmapsto & \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k. \end{array}$$

1. Montrer que  $(e_1, \dots, e_k)$  engendrent  $\mathbf{R}^n$  si et seulement si  $\Phi$  est surjective.
2. Montrer que  $(e_1, \dots, e_k)$  est libre si et seulement si  $\Phi$  est injective.

**Exercice 15** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et soit  $(u, v, w)$  une famille libre de  $\mathbf{R}^n$ . On note

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, x = (\alpha + \beta)u + (\alpha + 2\beta)v + (\alpha + 3\beta)w\}.$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ .
2. Les vecteurs  $u, v$  et  $w$  appartiennent-ils à  $F$  ?
3. Donner une base de  $F$ .

**Exercice 16** Soit  $n \geq 0$  un entier. On note  $\mathbf{R}_n[X]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

1. Soit  $(P_0, \dots, P_n)$  une famille de polynômes telle que chaque  $P_k$  soit de degré  $k$ . Montrer que cette famille est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .
2. Soit  $a$  un réel. Comment s'expriment les coordonnées d'un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  dans la base  $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$  ?

**Exercice 17** Dans l'espace  $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ , montrer que les familles suivantes sont libres

1.  $(\sin, \cos)$  ;
2.  $(f_1, f_2, f_3)$ , où on a noté  $f_k : x \mapsto x^k$  ;
3.  $(g_1, g_2, g_3)$ , où on a noté  $g_a : x \mapsto e^{ax}$  ;
4.  $(g_a, g_b, g_c)$ , où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels distincts.

**Exercice 18** Soit  $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ , et soient  $u, v, w \in E$  trois suites géométriques non nulles de raisons respectives 2, 3 et 5. Montrer que la famille  $(u, v, w)$  est libre.