Feuille n° 3 : Fractions rationnelles

Exercice 1 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \quad ; \quad B(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} \quad ; \quad C(X) = \frac{1}{X(X-1)^2}$$

$$D(X) = \frac{4}{(X^2-1)^2} \quad ; \quad E(X) = \frac{1}{X^4-1} \quad ; \quad F(X) = \frac{1}{X^n(X-1)}.$$

Exercice 2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X) = \frac{1}{X^2+X+1} \quad ; \quad B(X) = \frac{X}{(X-1)(X^2+1)^2}$$

$$C(X) = \frac{1}{(X+1)(X^3+1)} \quad ; \quad D(X) = \frac{P(X)}{X^n-1}, \quad \text{où} \quad P \in \mathbf{C}_{n-1}[X].$$

Exercice 3
Décomposer la fraction $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$ en éléments simples sur $\mathbf{C}$ puis sur $\mathbf{R}$.

Exercice 4

1. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(X+1)}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. Calculer de manière analogue les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+k^2+k^4} \quad ; \quad \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k(k^2-4)}.$$

Exercice 5 (∗)
Calculer la dérivée d'ordre 28 de la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)}$.

Exercice 6

1. Soit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle irréductible de $\mathbf{C}(X)$. Montrer que si a est un pôle simple de F, alors la partie polaire associée à a est $\dfrac{P(a)}{Q'(a)(X-a)}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{C}$ la fraction $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$.

Exercice 7 On dit que $F \in \mathbf{C}(X)$ est *paire* si $F(-X) = F(X)$. Soit $F \in \mathbf{C}(X)$ une fraction rationnelle paire, et $F = \frac{P}{Q}$ l'écriture de F sous forme irréductible.
Montrer que F est paire si, et seulement si, P et Q sont tous les deux pairs.

Exercice 8 (∗)

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Écrire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$
2. Déterminer tous les polynômes de $\mathbf{C}[X]$ qui sont divisibles par leur dérivée, puis faire la même chose pour $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 9 (∗)
Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on note $\omega_k = e^{2\imath k\pi/n}$. Écrire la fraction rationnelle $F(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}$ sous forme irréductible $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

Exercice 10 (∗) Existe-t-il une fraction rationnelle $F \in \mathbf{C}[X]$ telle que $(F(X))^2 = (X^2+1)^5$?

Le saviez-vous ? On identifie en général les premiers énoncés du théorème de décomposition en éléments simples dans deux textes indépendants de 1702, l'un dû à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) et l'autre à Jean Bernoulli (1667-1748), et tous deux dévolus à la question de l'intégration des fractions rationnelles. Ce théorème a été la source de réflexions de ces mathématiciens sur le théorème fondamental de l'algèbre, qui n'avait pas encore été clairement énoncé à cette époque.