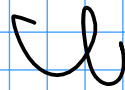
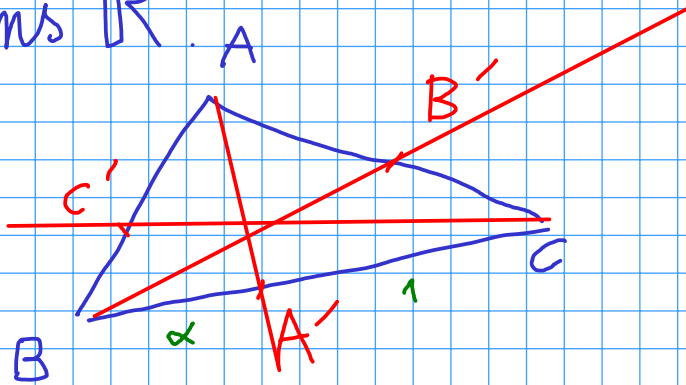


Géométrie



Soient A, B, C affinement indépendants dans $\mathbb{R}^2$.



Soient $A' = \text{bar}((B, 1), (C, \alpha))$

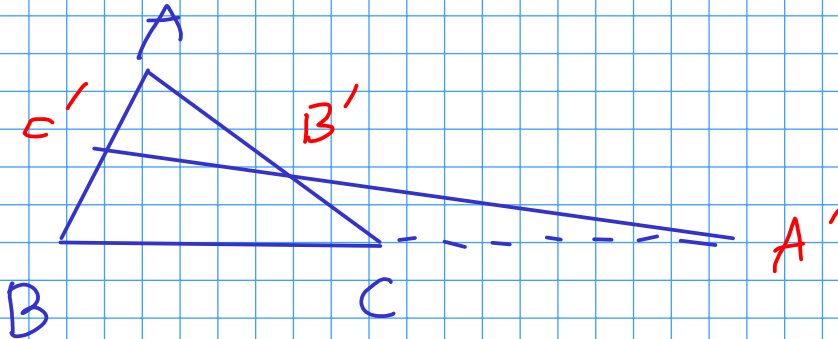
$B' = \text{bar}((C, 1), (A, \beta))$

$C' = \text{bar}((A, 1), (B, \gamma))$

Théorèmes

1) Ceva. $(AA') \cap (BB') \cap (CC') \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = 1$

2) Ménelais. A', B', C' alignés $\Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = -1$



démo. 2) A', B', C' alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & \beta & 1 \\ 1 & 0 & \gamma \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\uparrow$
 coordonnées barycentriques dans (A, B, C)
 de A', B', C'

$\Leftrightarrow 1 + \alpha\beta\gamma = 0.$

1) $M = \text{Bar}((A, x), (B, y), (C, z)) \in (AA')$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & \alpha & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z = \alpha y$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $A \quad \quad A' \quad M$

de même $M \in (BB') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & \beta & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = \beta z$

$M \in (CC') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & \gamma & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = \gamma x$

donc $(AA') \cap (BB') \cap (CC') \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \begin{cases} z = \alpha y \\ x = \beta z \\ y = \gamma x \end{cases} (*)$

$\mathcal{U}_2 \begin{cases} x - \beta z = 0 \\ \gamma x - y = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - \gamma L_1} \begin{cases} x - \beta z = 0 \\ -y + \beta\gamma z = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 + \alpha L_2} \begin{cases} x - \beta z = 0 \\ y - \beta\gamma z = 0 \\ (\alpha\beta\gamma - 1)z = 0 \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma - 1 \neq 0.$

Géométrie affine euclidienne.

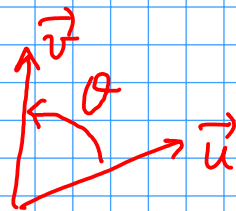
Angles orientés et géométriques.

définitions. 1) Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ euclidien

tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

Alors il existe ^{une unique} $\pi_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$, $\pi_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

tg $\vec{v} = \pi_\theta(\vec{u})$



on définit $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \theta \bmod 2\pi$

Plus généralement si $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$, on pose $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)}$

Remarques: 1) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\widehat{(\vec{v}, \vec{u})} \ [2\pi]$

2) $\widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \pi \ [2\pi]$

3) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \theta \iff \begin{cases} \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \\ \sin \theta = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \end{cases}$

4) si on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

si $\vec{u} = \rho e^{i\alpha}$

$\rho > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = \rho' e^{i\beta}$

$\rho' > 0, \beta \in \mathbb{R}$

alors $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = e^{i\alpha}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = e^{i\beta}$ et $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \beta - \alpha$
 $= \arg\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \overline{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}\right) \ [2\pi]$

Angle géométrique. Si $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$, on note
 $\widehat{uv} = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \in [0, \pi]$

3° Théorème de l'angle inscrit [correction] [correction suite]

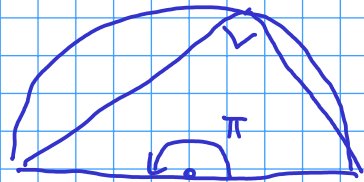
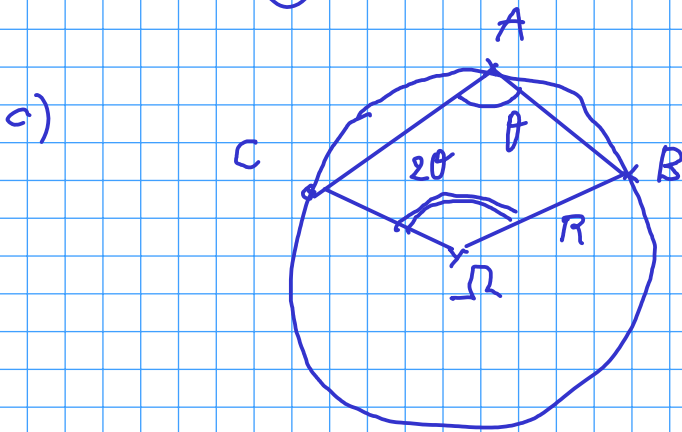
On fixe un repère orthonormé (O, u, v) , ce qui donne une orientation du plan. Soient A, B, C trois points du plan, (x_A, y_A) les coordonnées de A , $b = x_A + iy_A$ son affixe, de même pour b et c . On admet que la mesure d'un angle de vecteurs $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est l'argument de $(c-a)/(b-a)$.

a) On suppose que $|a| = |b| = |c| = 1$. Montrer que l'on a : $(\vec{OB}, \vec{OC}) = 2(\vec{AB}, \vec{AC}) \bmod 2\pi$.

Écrire $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$ pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Factoriser $e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} / e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ dans $(c-a)/(b-a)$.

b) On suppose A, B, C non alignés. Montrer qu'il existe un unique cercle contenant A, B et C .

c) Montrer que l'on a : $(\vec{\Omega B}, \vec{\Omega C}) = 2(\vec{AB}, \vec{AC}) \bmod 2\pi$, où Ω est le centre du cercle précédent.



cas où $R=1, \Omega=O, A=e^{i\alpha}, B=e^{i\beta}, C=e^{i\gamma}$

$$(\vec{\Omega B}, \vec{\Omega C}) = \arg \left(\frac{e^{i\gamma}}{e^{i\beta}} \right) = \arg (e^{i(\gamma-\beta)}) = \gamma - \beta \quad [2\pi]$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg \left(\frac{e^{i\gamma} - e^{i\alpha}}{e^{i\beta} - e^{i\alpha}} \right)$$

$$\text{On } \frac{e^{i\gamma} - e^{i\alpha}}{e^{i\beta} - e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}}}{e^{i\frac{(\alpha+\beta)}{2}}} \cdot \frac{2i \sin(\frac{\gamma-\alpha}{2})}{2i \sin(\frac{\beta-\alpha}{2})} = e^{i\frac{(\gamma-\beta)}{2}} \frac{\sin(\frac{\gamma-\alpha}{2})}{\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

$\in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \gamma - \beta \text{ ou } \gamma - \beta + \pi \quad [2\pi]$$

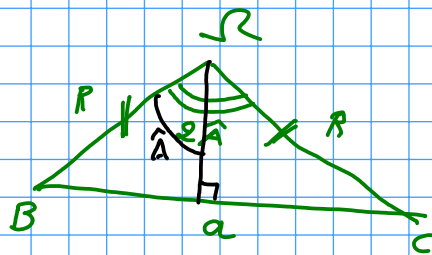
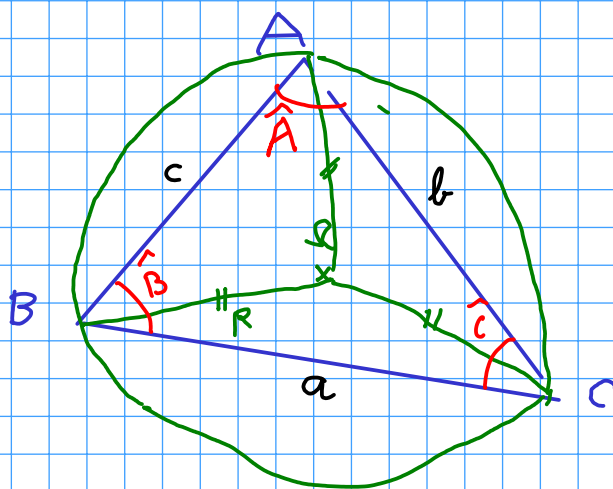
$$\Rightarrow 2 \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \gamma - \beta \quad [2\pi] \quad \square$$

5° Loi des sinus correction

Montrer que l'on a, en notant R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC :

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{1}{2R}$$

Utiliser le zeste de trigonométrie et le théorème de l'angle inscrit.



$$\sin \hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{1}{2R}$$

Exo Exprimer R avec a, b, c

$$\begin{aligned} BC^2 &= (\vec{OC} - \vec{OB})^2 = OC^2 + OB^2 - 2 OC \cdot OB \cos(2\hat{A}) \\ &= 2R^2 (1 - \cos 2\hat{A}) \\ &= 2R^2 (2 - 2\cos^2 \hat{A}) \\ &= 4R^2 (1 - \cos^2 \hat{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2 \cos \hat{A} AB \cdot AC \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{aligned}$$

$$d'_{on} \quad 4R^2 = \frac{a^2}{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{2a^2 bc}{a^2 - (b-c)^2}.$$

Analyse Complexe

Principe du maximum

Théorème. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe
Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (holomorphe)

Si $|f|$ a un maximum local en $a \in \Omega$,

Alors f constante.

démo. Supposons $a=0$.

et $D(0,R) = \{ |z| < R \} \subset \Omega$

et $\forall |z| < R, |f(z)| \leq |f(0)|$.

Alors $\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence $\geq R$ tq :

$$\forall |z| < R, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

$$\forall |z| = r < R \quad |f(z)|^2 = f(z) \overline{f(z)}$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m \overline{a_n} z^m \overline{z}^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}) i n e^{it}}{r e^{it}} dt$$

(Formule de Cauchy
pour γ_r (0))

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_m \overline{a_n} r^{m+n} e^{i(m-n)t} = |f(re^{it})|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m \bar{a}_n r^{m+n} e^{i(m-n)t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df(re^{it})}{dt} dt$$

$$\Rightarrow \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m \bar{a}_n r^{m+n} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt}_{0 \text{ si } m \neq n} \leq |f(0)|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 r^{2m} \leq |a_0|^2 \quad (\forall 0 \leq r < R)$$

$$\Rightarrow \forall m > 0, a_m = 0 \Rightarrow f(z) = f(0) \quad (\forall |z| < R)$$

$$(\Rightarrow \forall n \geq 1, f^{(n)}(0) = 0)$$

$$\Rightarrow f \text{ constante sur } \Omega.)$$

$$f \text{ constante sur } D(0, R) \Rightarrow f \text{ constante sur } \Omega.$$

Corollaire. Soit Ω ouvert connexe tel que $\bar{\Omega}$ compact

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ alors

$$\sup_{\Omega} |f| = \max_{\bar{\Omega} \setminus \Omega} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

démo. $\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\bar{\Omega}} |f| = \max_{\bar{\Omega}} |f| = f(z_0)$

Si $z_0 \in \Omega$, alors $|f|$ a max local en $z_0 \Rightarrow f$ constante
 si $z_0 \notin \Omega$, alors $z_0 \in \partial\Omega$.

Corollaire. Lemme de Schwarz

Soit $D = D(0, 1) = \{ |z| < 1 \}$

Soit $f: D \rightarrow D$ biholomorphisme

c-à-d: f bijective, holomorphe et f^{-1} holomorphe

Si $f(0)=0$, ALORS $\exists |\lambda|=1, \forall z \in D, f(z)=\lambda z$.

démo. Soit $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$. Alors φ holomorphe sur D .

$$f'(0) \text{ si } z=0$$

$$\text{et } \forall 0 < r < 1, \quad \sup_{|z| < r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |f|$$

$$\text{donc } \sup_{|z| < r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f|$$

$$\leq \frac{1}{r} \quad (f(D) \subset D)$$

$$\Rightarrow | \varphi(0) | = | f'(0) | \leq \frac{1}{r} \quad \forall 0 < r < 1$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq 1$$

$$\text{De même } |(f^{-1})'(0)| \leq 1 \quad \text{or } |(f^{-1})'(0)| = \left| \frac{1}{f'(0)} \right|$$

$$\Rightarrow \boxed{|f'(0)| = 1}$$

$$\text{Or } \forall |z| < 1, \quad \forall |z| < r < 1, \quad |\varphi(z)| \leq \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow |\varphi(z)| \leq \frac{1}{| \varphi(0) |} \quad (\forall |z| < 1)$$

donc $|\varphi|$ a un maximum local en 0 $\Rightarrow \varphi = \text{constante}$

$$\varphi = f'(0) = \lambda \quad \text{et } |\lambda| = 1. \quad \text{C-à-d } \forall z, f(z) = \lambda z.$$

Corollaire : $\text{Aut}_{\text{hol}}(\mathbb{D}) = \{ f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ biholomorphisme} \}$
 $= \{ h_{\theta,a}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \mid \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1 \}$
 $z \mapsto e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$

démo.

1^{ère} étape $h_{\theta,a} \in \text{Aut}_{\text{hol}}(\mathbb{D})$.

— c'est bien défini : $\mathbb{D} \xrightarrow{h_{\theta,a}} \mathbb{C}$

— c'est à valeurs dans $\mathbb{D}$

car $\sup_{\mathbb{D}} |h_{\theta,a}| = \max_{|z|=1} |h_{\theta,a}(z)| = 1$.

(si $z = e^{i\psi}$, $h_{\theta,a}(e^{i\psi}) = e^{i\theta} \frac{a - e^{i\psi}}{1 - \bar{a}e^{i\psi}} = e^{i\theta+\psi} \left(\frac{ae^{-i\psi} - 1}{1 - \bar{a}e^{i\psi}} \right)$
 $\Rightarrow |h_{\theta,a}(e^{i\psi})| = \left| \frac{ae^{-i\psi} - 1}{1 - \bar{a}e^{i\psi}} \right| = 1$)

donc $\forall |z| < 1, |h_{\theta,a}(z)| \leq 1$

$h_{\theta,a}$ non constante sur $\mathbb{D} \implies \forall |z| < 1, |h_{\theta,a}(z)| < 1$
 principe du maximum

— $h_{\theta,a}^{-1}$ est holomorphe

En effet $h_{\theta,a}^{-1} = h_{-\theta,\bar{a}}$ (exo)

2^è étape. Soit $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ biholomorphe.

Soit $f(0) = a$, $|a| < 1$. $h_{0,a} \circ f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$
 $0 \mapsto 0$

$\Rightarrow$
(Lemma de Schwarz)

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \forall |z| < 1, h_{0,a} \circ f(z) = e^{i\theta} z$$

$$\Rightarrow \forall |z| < 1 \quad f(z) = h_{0,a}^{-1}(e^{i\theta} z)$$

$$= \frac{\bar{a} - e^{i\theta} z}{1 - a e^{i\theta} z} = e^{i\theta} \frac{\bar{a} e^{-i\theta} - z}{1 - a e^{i\theta} z}$$

$$\Rightarrow f = h_{\theta, \bar{a} e^{i\theta}} \quad \square$$

Calcul différentiel

Théorème des fonctions implicites

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$
ouvert $(x,y) \longmapsto f(x,y)$

Soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$

Si $\partial_y f(a,b) : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ isomorphisme linéaire

ALORS il existe $(a,b) \in W \subset U$
ouvert

et $a \in V \subset \mathbb{R}^m$ ouvert

et $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$

tel que $\forall (x,y) \in W, \quad f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } y = \varphi(x)$

ex. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ $m=n=1$

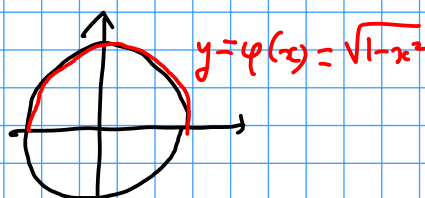
$(a,b) = (0,1)$

$\partial_y f(0,1) = 2 \neq 0$

et « $y = \sqrt{1-x^2}$ convient »

Si $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y > 0 \text{ et } y = \sqrt{1-x^2}$

$\mathcal{C} = \{ f(x,y) = 0 \}$



Courbes paramétrées.

Définition. Une courbe paramétrée est une fonction $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue où I = intervalle de $\mathbb{R}$.

le support de γ est $\gamma(I)$

γ est SIMPLE si γ injective

$t_0 \in I$ est régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$

bi-régulier si $\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)$ sont non colinéaires

γ est RÉGULIÈRE si $\forall t \in I, \gamma'(t) \neq 0$

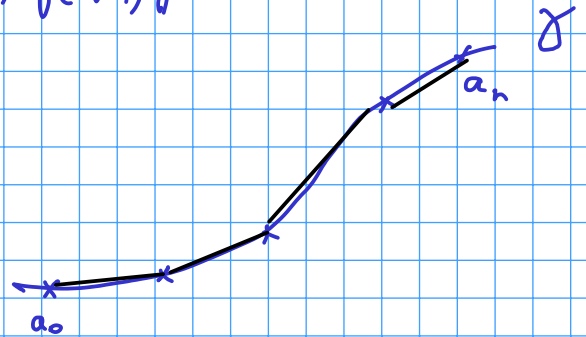
Définition Si $\gamma \in \mathcal{C}^1$ paramétrisée, $L(\gamma)$ = longueur de γ

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Proposition. $L(\gamma) = \sup \sum_{k=1}^n \|\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})\|$

$$a = a_0 < \dots < a_n = b$$



On dit que $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont

équivalentes si $\exists \varphi: I_1 \rightarrow I_2$ homéomorphisme, $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$

On dit que γ est paramétrée par la longueur d'arcs si $\forall t \in I, \|\gamma'(t)\| = 1$
(ou par abscisse curviligne)

Proposition: $\forall \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^1$, $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ paramétrée par la longueur d'arcs.
régulière

démo: si $I = [a, b]$, on pose $s(x) = \int_a^x \|\gamma'(t)\| dt$
 et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$

$$\|\tilde{\gamma}'(y)\| = \|\gamma'(s^{-1}(y)) s^{-1}'(y)\| = \|\gamma'(s^{-1}(y))\| \frac{1}{s'(s^{-1}(y))} = 1$$

Rayon de courbure

Définition 1) Si $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ courbe paramétrée par la longueur d'arcs C^2

on pose $\forall x \in I$, $K(x) = \|\gamma''(x)\|$ courbure

et $R(x) = \frac{1}{K(x)}$ rayon de courbure

2) si $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ courbe plane C^2 régulière

$$\text{alors } \forall t \in I, K(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

remarques. si γ droite, $K = 0$

si γ cercle de rayon R , $K = \frac{1}{R}$ constant

$$\text{si } \gamma(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad \gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

$$\gamma''(t) = (-R \cos t, -R \sin t)$$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{\begin{vmatrix} -R \sin t & R \cos t \\ -R \cos t & -R \sin t \end{vmatrix}}{R^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

démo de 2)

$$S(x) = \int_a^x \| \gamma'(t) \| dt \quad \text{on} \quad \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{e}^1.$$

$$\forall x \in I, \tilde{\gamma}(S(x)) = \gamma(x) \quad \text{avec} \quad \forall x \in I, \|\tilde{\gamma}'(S(x))\| = 1$$

$$K(S(x)) = \|\tilde{\gamma}''(S(x))\|$$

$$\begin{aligned} \text{or: } \det(\gamma', \gamma'') &= \det(\tilde{\gamma}'(S(x)) S'(x), \underbrace{\tilde{\gamma}''(S(x)) S'(x)^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\tilde{\gamma}'(S(x)) S''(x)}_{\in \mathbb{R}}) \\ &= \det(S'(x) \tilde{\gamma}'(S(x)), S'(x)^2 \tilde{\gamma}''(S(x))) \end{aligned}$$

$$\text{or } \forall s \quad \|\tilde{\gamma}'(s)\|^2 = 1 \Rightarrow 2 \cdot \tilde{\gamma}'(s) \cdot \tilde{\gamma}''(s) = 0$$

produit scalaire

$$\Rightarrow \det(\gamma', \gamma'') = \pm S'(x)^3 \underbrace{\|\tilde{\gamma}'(S(x))\|}_{=1} \underbrace{\|\tilde{\gamma}''(S(x))\|}_{K(S(x))}$$

$$\Rightarrow |\det(\gamma', \gamma'')| = |S'|^3 K(S(x))$$

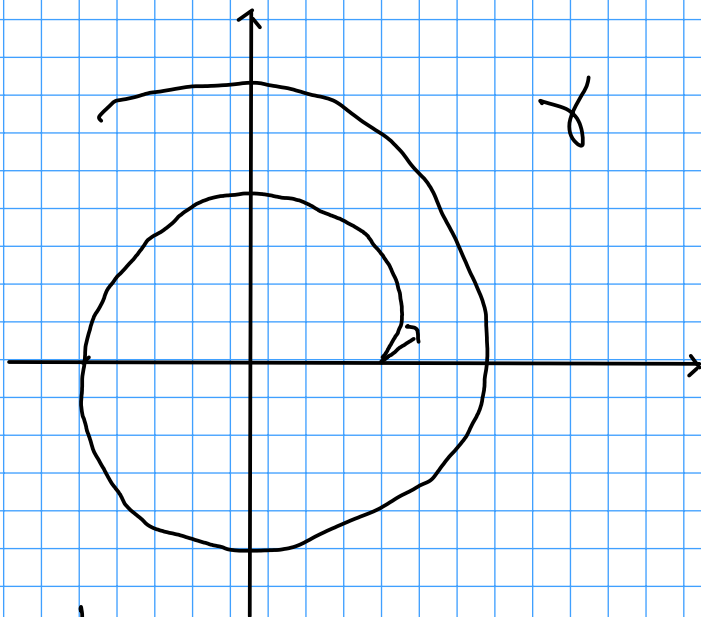
$$\Rightarrow K(S(x)) = \frac{|\det(\gamma', \gamma'')|}{\|\gamma'(x)\|^3}$$

Exercice 2. La spirale logarithmique est la courbe paramétrée par $M(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Dessiner la spirale et montrer qu'elle est régulière partout.
2. Si on désigne par $v(t)$ le vecteur vitesse au point $M(t)$, montrer que l'angle entre $\overrightarrow{OM(t)}$ et $v(t)$ est constant; le déterminer.
3. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, et le déterminer, tel que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la longueur de la courbe pour $t \in]-\infty, t_0]$ est égale à $\lambda \cdot \|\overrightarrow{OM(t_0)}\|$.
4. Trouver un paramètre par longueur d'arc $s(t)$ et reparamétriser la spirale par longueur d'arc.
5. Déterminer la courbure en un point quelconque.

(feuille 8)

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad t \in \mathbb{R}$$



$$L(\gamma)(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \| (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)) \| dt$$

$$= \int_{-\infty}^t e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} dt = \sqrt{2} e^t$$

Paramétrisation par la longueur d'arcs: $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\ln(\frac{s}{\sqrt{2}})) \dots$

Courbure
$$K(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) \\ 2e^t(-\sin t) & 2e^t \cos t \end{vmatrix}}{\| \gamma'(t) \|^3} = \frac{2e^{2t} |\cos^2 t + \sin^2 t|}{(\sqrt{2} e^t)^3} = \frac{1}{\sqrt{2} e^t}$$

$$\gamma''(t) = (e^t(\cos t - \sin t - \sin t - \cos t), e^t(\sin t + \cos t + \cos t - \sin t))$$

$$= e^t(-2\sin t, 2\cos t) = 2e^t(-\sin t, \cos t)$$

Rayon de courbure: $\sqrt{2} e^t = \frac{1}{K(t)}$