Université Claude Bernard
PROBABILITÉS

Licence de Mathématiques, L3

FEUILLE DE TD 6

Convergence en probabilité, dans L^p. Convergence en loi.

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction F_n définie par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

1. Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable X_n dont on donnera la loi.
2. $(X_n)_n$ converge-t-elle en loi ?

Exercice 2. Convergence en loi et densités

1. Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de densité $f_n : x \mapsto 1_{[0,1]}(x)(1 - \cos(2\pi n x))$.
   (a) Montrer que $(f_n(x))_n$ converge ssi $x \in \mathbb{N}$.
   (b) Est-ce que $(X_n)_n$ converge en loi ? Si oui, déterminer la limite.
   Indication : on pourra considérer la fonction de répartition.
2. Pour tout $n \geq 1$, soit Y_n une variable aléatoire de densité $g_n : x \mapsto \dfrac{a\,n}{\pi(1 + n^2x^2)}$.
   (a) Calculer a.
   (b) En considérant les fonctions de répartitions, montrer que $(Y_n)_n$ converge en loi et donner la loi de la limite.

Exercice 3. Convergence en loi, propriétés et contre-exemples

1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers X, alors pour toute fonction continue g, $(g(X_n))_n$ converge en loi vers $g(X)$.
2. Montrer que si la suite de couples de v.a. $(X_n, Y_n)_n$ converge en loi vers (X, Y), alors $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$.
   N.B. : On dit que le couple $(X_n, Y_n)_n$ converge en loi vers (X, Y) si pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{E}[f(X_n, Y_n)] \to \mathbf{E}[f(X, Y)]$.
3. Donner un exemple d'une suite $(X_n, Y_n)_n$ telle que $(X_n)_n$ converge en loi vers X, $(Y_n)_n$ converge en loi vers Y et que $(X_n + Y_n)_n$ ne converge pas en loi.
4. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une constante $c \in \mathbb{R}$, alors la convergence a lieu aussi en proba.
5. Donner un exemple où $(X_n)_n$ converge en loi vers X, mais pas en proba.
6. Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$. Si Y est une constante c p.s., montrer que $(X_n + Y_n)_n$ converge en loi vers $X + c$.
7. Si une suite de variables aléatoires $(Z_n)_n$ converge en loi vers Z, est-ce que $(Z_n - Z)_n$ converge en loi vers 0 ? Si oui, le justifier. Sinon, donner un contre-exemple.
8. Si une suite de variables aléatoires $(Z_n)_n$ converge en loi vers Z, est-ce que $\mathbf{E}[Z_n] \to \mathbf{E}[Z]$? Si oui, le justifier. Sinon, donner un contre-exemple.

9. (*) Si une suite de variables aléatoires $(Z_n)_n$ converge en loi vers Z, montrer que $(Z_n)_n$ est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\mathbf{P}(|Z_n| > M) \leq \epsilon.$$
Indications : Pour $M > 1$, trouver f continue bornée telle que pour toute variable réelle X,
$$\mathbf{P}(|X| > M) \leq \mathbf{E}[f(X)] \leq \mathbf{P}(|X| > M - 1).$$
Utiliser ensuite la propriété déjà vue : pour toute variable réelle X, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que $\mathbf{P}(|X| > K) \leq \epsilon$. Enfin, se rappeler de la preuve de « toute suite réelle convergente est bornée ».

Idées de variables à considérer pour les contre-exemples :
— $(-1)^n X$, *où X est de loi* $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$;
— $(1 - \frac{1}{n})\delta_0 + \frac{1}{n}\delta_n$.

Exercice 4.
Soit $\alpha > 0$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi
$$\mathbf{P}_{Z_n} = \frac{1}{n^\alpha}\delta_1 + \Big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\Big)\delta_0.$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.
2. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^1 vers 0.
3. Montrer que $\mathbf{P}$-p.s.,
$$\limsup_n Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha \leq 1. \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$
Indication : justifier que $\limsup_n Z_n \in \{0, 1\}$, *et que*
$$\{\limsup_n Z_n = 1\} = \limsup_n \{Z_n = 1\}.$$

Exercice 5. Convergence en probabilité, dans L^p

Soit $(X_n)_n$, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires. Soit $p > 0$.
1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements tels que $\mathbf{P}(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et X une v.a. intégrable. Montrer que $\int_{A_n} X d\mathbf{P} \to_n 0$.
2. Montrer que si $(X_n)_n$ converge dans L^p vers 0, alors $(X_n)_n$ converge en probabilité vers 0.
3. Réciproquement, si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers 0 et si
$$\sup_{n\geq 1} |X_n| \leq Y \in L^p(\mathbf{P}),$$
montrer que (X_n) converge dans L^p vers 0.

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction
$$F_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx} + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable X_n.
2. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi, et donner la loi limite.