

FEUILLE DE TD 1
Lois, théorème de transfert

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1. Espérance

Soit $X : \Omega \rightarrow \{-2, 1\}$ une v.a. de loi $\mathbf{P}_X = (1/3)\delta_{-2} + (2/3)\delta_1$.

1. Calculer $\mathbf{E}(|X|)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X^n)$ existe et calculer sa valeur.
3. Soit $n \geq 1$ un entier fixé, on note $Y = X^n + 1$. Déterminer la loi de Y . En déduire $\mathbf{E}(Y^2)$.

Exercice 2. Lois uniformes

Soit $U : \Omega \rightarrow [a, b]$ une variable aléatoire de loi $\mathbf{P}_U(dx) = \alpha \mathbf{1}_{[a,b]} dx$ pour un certain $\alpha > 0$, où dx est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . On dit que U a pour loi la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

1. Calculer α .
2. Calculer l'espérance et la variance de U .

Exercice 3. Calcul d'une loi

Soit $U : \Omega \rightarrow [0, 1]$ de loi uniforme (c'est-à-dire que \mathbf{P}_U est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$). Donnez la loi de la v.a. $X = (-2) \times \mathbf{1}_{[0,1/3]}(U) + \mathbf{1}_{]1/3,1]}(U)$.

Exercice 4. Espérances et variances des lois usuelles

Dans chacun des cas suivants, vérifier qu'on définit bien une variable aléatoire X , et calculer son espérance et sa variance.

1. Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = p,$$

2. Binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}, p \in [0, 1]$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

3. Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbf{N}$$

4. Géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$\mathbf{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N},$$

5. Exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbf{P}_X(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Exercice 5. Espérance d'une loi

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbf{P}_X(dx) = \alpha x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx$.

1. Calculer α .
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X^n)$.

Exercice 6. Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Calculer la probabilité que X soit paire.
2. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{E}(e^{-tX})$.
3. On pose

$$Z = |\cos(\pi X/2)| \cdot (X/2)$$

Déterminer la loi de Z et calculer $\mathbf{E}(Z)$.

Exercice 7. Intégrabilité

Soit Z une variable aléatoire positive.

1. On suppose que Z est à valeurs dans \mathbf{N} . Montrer que $\mathbf{E}(Z) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n)$.
2. (*) On ne suppose plus que Z est à valeurs dans \mathbf{N} . Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n) \leq \mathbf{E}(Z) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n).$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit intégrable.