III.3 Dimension 3

III.3.1 Produit vectoriel

Définitions. (*Produit vectoriel et produit mixte*)

1) $\forall\, x,y,z,x',y',z' \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

2) $\forall\, x,y,z,x',y',z',x'',y'',z'' \in \mathbb{R},\ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] := \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$

Propriétés.

i) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée.

ii) $\forall\, u,v,w \in \mathbb{R}^3$, $[u,v,w] = (u \wedge v) \cdot w$ †

iii) $\forall\, u,v,w \in \mathbb{R}^3$, $u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$.

iv) $\forall\, u,v \in \mathbb{R}^3$, $||u \wedge v||^2 = ||u||^2||v||^2 \sin^2\alpha$ où $\alpha \in [0,\pi]$, $(u \cdot v) = ||u||||v|| \cos\alpha$.

v) (Jacobi) $\forall\, u,v,w$, $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$.

Remarque. $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y}$.

III.3.2 Formule de Rodrigues

Si $\vec{x} = {}^t(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\Lambda_{\vec{x}} := \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ ‡. Soit $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1.

— La matrice de la rotation d'axe $\vec{k}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est $R_{\vec{k},\theta} = I_3 + \sin\theta\Lambda_{\vec{k}} + (1-\cos\theta)\Lambda_{\vec{k}}^2$.

— Comme application linéaire, on a :

$$\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ R_{\vec{k},\theta}(\vec{v}) = \cos\theta\, \vec{v} + \sin\theta\, \vec{k} \wedge \vec{v} + (1-\cos\theta)(\vec{k} \cdot \vec{v})\, \vec{k}\ .$$

Exemples. $R_{\vec{e_1},\theta} = R_{1,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $R_{\vec{e_3},\theta} = R_{3,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. $R = \exp(\theta\Lambda_{\vec{k}})$.

†. Pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

‡. C'est la matrice de $\vec{v} \mapsto \vec{x} \wedge \vec{v}$.

III.3.3 Axes d'une rotation.

Théorème. Si $R \in O_3(\mathbb{R})$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $Rv = \pm v$.

Démo. (Euler) Si ${}^tR \neq R$, soit $0 \neq v \in \ker {}^tR - R$.

Si ${}^tR = R$, alors $R^2 = I_3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \ker(R - I_3) \oplus \ker(R + I_3)$.

Corollaire. Soit $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, alors si ${}^tR \neq R$, l'axe de la rotation R est

$$\ker R - I_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{pmatrix} .$$

Exercice. $\forall\, R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\exists\, P \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $R = {}^tP R_{1,\theta} P$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

III.3.4 Angles d'Euler

Exercice. Les matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$R_{1,\alpha} R_{3,\beta} R_{1,\gamma}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} .$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Indication. Soit $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $R(\vec{e_1}) = R_{1,\alpha} R_{2,\beta}(\vec{e_1})$. Alors $\exists\, \gamma$, $(R_{1,\alpha} R_{2,\beta})^{-1} R = R_{1,\gamma}$.