Université Claude Bernard Lyon 1
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie
Année 2023

Géométrie affine euclidienne

I Relations métriques en géométrie plane

1° Sommes de carrés de distance-Liebniz [correction]

Soit $r \in \mathbb{N}$. Soient $(A_1, \ldots, A_r)$ un ensemble de points du plan euclidien et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^r$. On définit la fonction

$$f : M \mapsto \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M A_i^2$$

a) On considère d'abord le cas $r = 2$. Décrire les lignes de niveaux de f. (différencier les cas $\sum \alpha_i = 0$ et $\neq 0$).
b) Quels sont les lignes de niveaux dans le cas général ?
Dans un plan affine euclidien, soit ABC un triangle non aplati. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; $\widehat{A}$ l'angle géométrique (qu'est-ce ?) défini par $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

2° Un zeste de trigonométrie [correction]

Soit un plan affine euclidien orienté. Montrer que si A, B, C sont trois points distincts, on a :

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{AB \cdot AC}, \quad \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC}.$$

3° Théorème de l'angle inscrit [correction][correction suite]

On fixe un repère orthonormé (O, u, v), ce qui donne une orientation du plan. Soient A, B, C trois points du plan, (x_A, y_A) les coordonnées de A, $b = x_A + iy_A$ son affixe, de même pour b et c. On admet que la mesure d'un angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est l'argument de $(c-a)/(b-a)$.

a) On suppose que $|a| = |b| = |c| = 1$. Montrer que l'on a : $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \bmod 2\pi$.
Écrire $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$ pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Factoriser $e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}/e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ dans $(c-a)/(b-a)$.
b) On suppose A, B, C non alignés. Montrer qu'il existe un unique cercle contenant A, B et C.
c) Montrer que l'on a : $(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \bmod 2\pi$, où Ω est le centre du cercle précédent.

4° Relation d'Al Kashi [correction]

SOit ABC un triangle $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Montrer que l'on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

Partir de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ et « élever au carré ».

5° Loi des sinus[correction]

Montrer que l'on a, en notant R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC :

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{1}{2R}.$$

Utiliser le zeste de trigonométrie et le théorème de l'angle inscrit.

II Projection et réflexions

1°

a) Soit $\omega = {}^t(a\ b\ c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du projeté orthogonal d'un vecteur $v = {}^t(x\ y\ z)$ sur la droite $\mathbb{R}\omega$. En déduire les coordonnées de l'image de v par la réflexion d'hyperplan $\omega^\perp$ et par le demi-tour d'axe $\mathbb{R}\omega$.
[correction]
b) Donner les coordonnées de l'image d'un point $M = (x, y, z)$ par les réflexions de plans d'équations $y = z$ et $x = z$; décrire la composée (dans chaque ordre possible). [correction]

III Avec des cercles

1° Homothéties [correction]

Soient $\mathscr{C}$ et$\mathscr{C}'$ deux cercles du plan affine. Trouver les homothéties qui envoient $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$.

2° Orthocentre

[correction]
a) Soit ABC un triangle non plat u plan affine. Montrer qu'il existe un triangle $A'B'C'$ tel que A' milieu de BC, B' milieu de AC et C' milieu de AB. Comment tracer ce triangle ? uel est son isobarycentre ?
b) Montrer que les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A'B'C'$ et qu'elles sont donc concourantes.
c) Montrer que $A'B'C'$ est l'image par l'homothétie de centre G (isobarycentre de ABC) et de rapport -2.
d) Soit I milieu de AB. Montrer que $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI}$.
e) On considère un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B ainsi qu'un point M qui décrit $\mathscr{C}$. On note H l'orthocentre de ABM. Montrer que H décrit le cercle symétrique à $\mathscr{C}$ par rapport à AB. [correction]
f) [Cercle et droite d'Euler] Montrer que l'isobarycentre, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre de ABC sont alignés.Montrer que le cercle passant par le pied des hauteurs coupe les cotés en leur milieu.[correction]