Puissance d'un point par rapport à un cercle

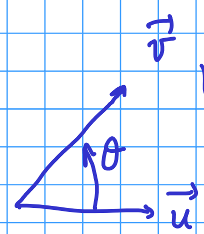
définition. Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tq $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ alors

$$\exists!\ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}),\quad R_\theta(\vec{u}) = \vec{v}$$

on pose $\quad (\vec{u}, \vec{v}) = \theta \ [2\pi]$

Si $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$, on pose $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right)$

Remarques.

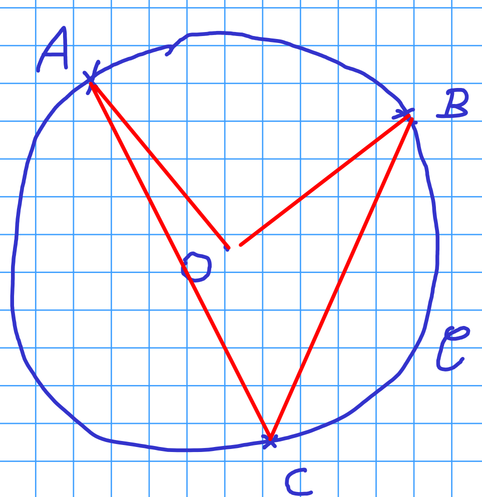


$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w},\ (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$

$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$.

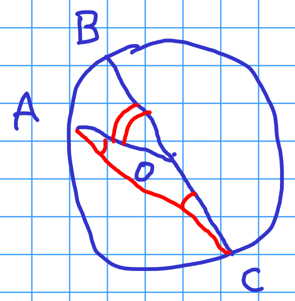
1) Théorème de l'angle inscrit



$\forall A, B, C \in \mathcal{C},\quad (\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB})\ [2\pi]$

$\mathcal{C}$ cercle de centre O

démo. Cas où O, C, B alignés



$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi -$

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \pi$

or OAC isocèle en O

donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})$

$= (-\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC})$

$= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}) + \pi$

$= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + \underbrace{(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AC})} + \pi$

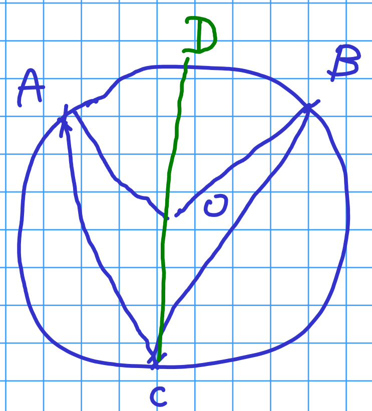
$= \cancel{\pi} - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) + \cancel{\pi}$

$= -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

$= -(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$

Cas général



d'après le cas précédent

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$

$(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$

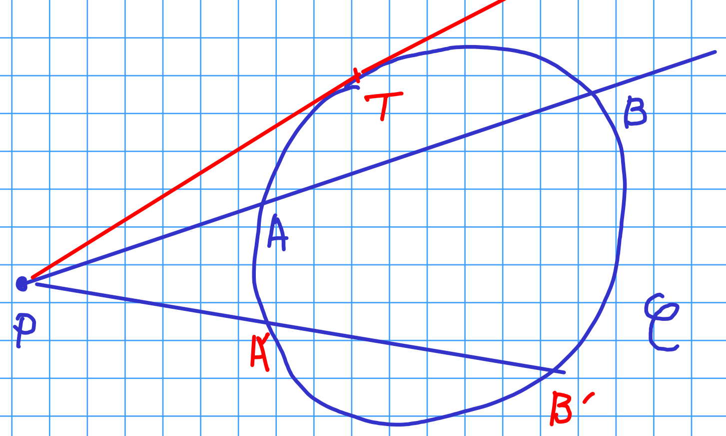
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$

2) Puissance d'un point

Définition. Si $\mathcal{C}$ cercle de centre O et de rayon r

on pose $\forall P \in \mathbb{R}^2$ $\boxed{\Pi_{\mathcal{C}}(P) = OP^2 - r^2}$

Théorème :



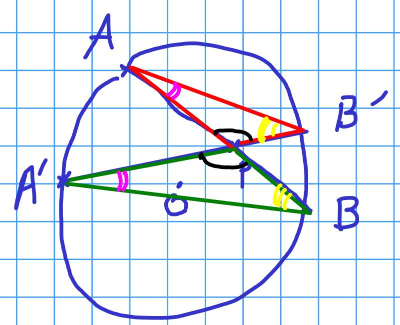
$\forall$ droite $d \ni P, A, B$

où $A, B \in \mathcal{C}$,

$$\pi_{\mathcal{C}}(P) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

[En particulier, $\forall A, B, A', B' \in \mathcal{C}$
(P, A, B) alignés
(P, A', B') alignés
$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PB'}$]
$= PT^2$

Remarque.



(PAB') et $(PA'B)$ triangles semblables.

En effet : $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) \quad [\pi]$

(théo. de l'angle inscrit)

$= (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'B'})$

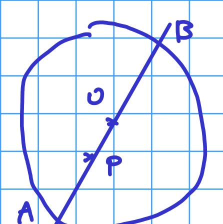
$= (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'P}) \quad [\pi]$

triangles semblables $\Rightarrow$ « longueurs proportionnelles »

$$\frac{A'B}{AB'} = \frac{PA'}{PA} = \frac{PB}{PB'} \Rightarrow PA' \cdot PB' = PA.PB$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PB'} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$

Cas particulier



$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -(r - OP)(r + OP) = -(r^2 - OP^2)$$
$$= OP^2 - r^2.$$

Définition : l'axe radial de 2 cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ est

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : \pi_{\mathcal{C}}(P) = \pi_{\mathcal{C}'}(P)\}$$

c'est une droite !

[En effet : $OP^2 - r^2 = O'P^2 - r'^2 \iff OP^2 - O'P^2 = r^2 - r'^2$

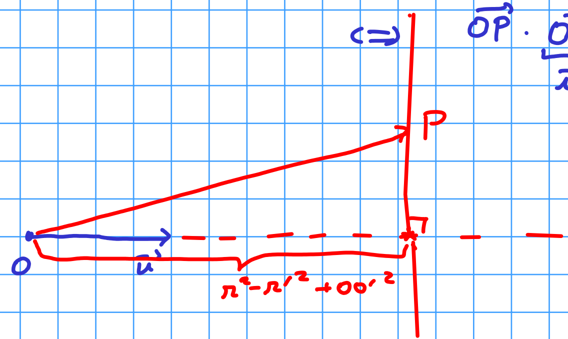
(r = rayon de $\mathcal{C}$, r' rayon de $\mathcal{C}'$

O = centre de $\mathcal{C}$, O' centre de $\mathcal{C}'$)

$$\iff (\vec{OP} - \vec{O'P}) \cdot (\vec{OP} + \vec{O'P}) = r^2 - r'^2$$

$$\iff \vec{OO'} \cdot (\vec{O'O} + 2\vec{OP}) = r^2 - r'^2$$

$$\iff \vec{OP} \cdot \underbrace{\vec{OO'}}_{\vec{u}} = r^2 - r'^2 + OO'^2$$

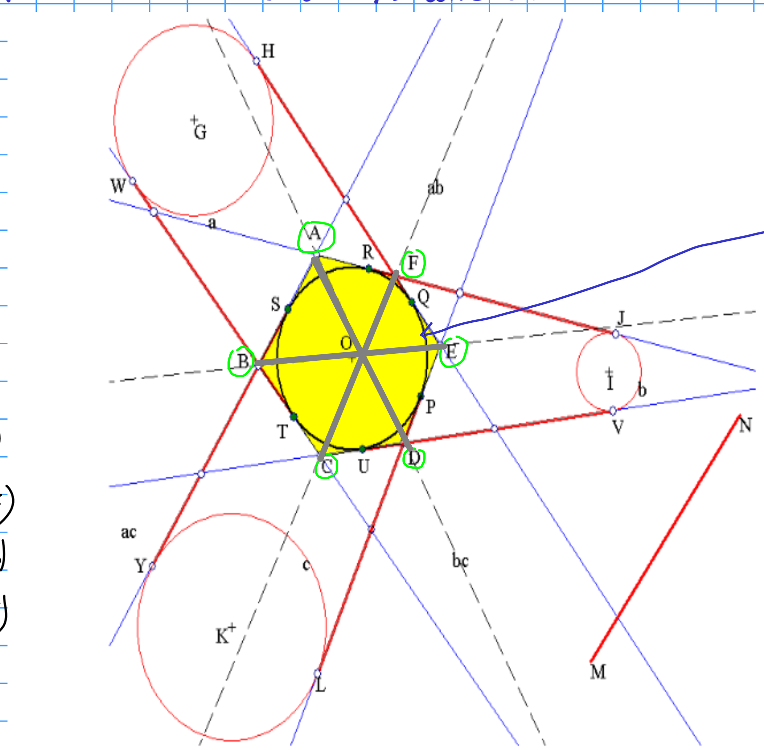


Application. Théorème de Brianchon

Soit $\mathcal{C}$ cercle

Soit ABCDEF un hexagone dont les côtés sont tangents à $\mathcal{C}$

Alors ses diagonales AD, BE, CF sont concourantes



démo.

Soient P, Q, R, S, T, U les points de tangence

On fixe $l > 0$

Soient J, V, L, Y, W, H

tq $RJ = l$ $(RJ) = (AF)$

$UV = l$ $(UV) = (CD)$

$TW = l$ $(TW) = (BC)$

$PL = l$ $(PL) = (DE)$

$SY = l$ $(SY) = (AB)$

$QH = l$ $(QH) = (EF)$

$(OR) \perp (AF)$ (car $\mathcal{C}$ tangent à (AF))

Si b cercle tangent à (AF) en J de centre I alors b tangent à (CD) en V

De même on construit les cercles c , a ← tangent à (BC) et (AF).

↑ tangents à (AB) et (ED)

(ab) = axe radical pour les cercles a et b

or $\pi_a(F) = \pi_b(F)$ et $\pi_a(C) = \pi_b(C) \Rightarrow (CF) = (ab)$

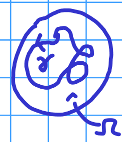
de même $(AD) = (bc)$ axe radical de b et c

$(BE) = (ac)$ " " de a et c

Soit $Z = (ab) \cap (bc)$ alors $\pi_a(Z) = \pi_b(Z) = \pi_c(Z) \Rightarrow Z \in \overset{(CF)}{\overset{\shortparallel}{(ab)}} \cap \overset{(AD)}{\overset{\shortparallel}{(bc)}} \cap \overset{(ac)}{\overset{\shortparallel}{(ac)}}$ □

Pause = 5'.

Théorème des résidus

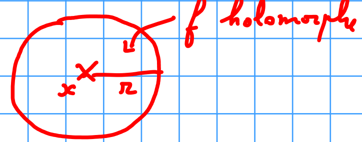


Théorème. Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$

Soit $\gamma \subset \Omega$ lacet tq $\forall z \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$

Soit f tq $\forall x \in \Omega$, f a une singularité isolée en x.

[c-à-d $\exists r > 0$, f holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - x| < r\}$]



ALORS $$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{a \in \mathbb{C}} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\ \mathrm{Rés}_a(f)$$ [$\gamma \subset \Omega \setminus \{$singularités non artificielles$\}$]

démo. L'ensemble $\{a \in \Omega : f$ n'est pas holomorphe en a et $\mathrm{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}$ est fini.

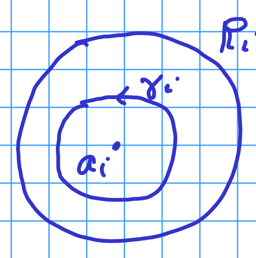
noté $\{a_1, \dots, a_N\}$

$\forall i$ soit $R_i > 0$ tq f holomorphe sur $\{0 < |z - a_i| < R_i\} \subset \Omega$

soit $0 < r_i < R_i$

soit $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto a_i + r_i e^{2i\pi t}$



Soit $\Gamma = \gamma - \sum_{j=1}^{N} n_j \gamma_j$

où $n_j \in \mathbb{Z}$, $n_j := \mathrm{Ind}_\gamma(a_j)$

Alors $\begin{cases} \forall z \notin \Omega', & \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \text{ où } \Omega' = \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_N\} \quad (*) \\ f \text{ holomorphe sur } \Omega'. \end{cases}$

(*) En effet : si $z \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \underbrace{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}_{= 0} - \sum_{j=1}^{N} n_j \underbrace{\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(z)}_{= 0} = 0$

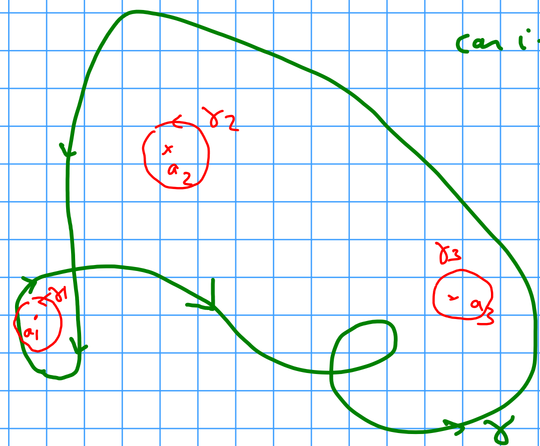
si $z \in \{a_1, \dots, a_N\}$

par exemple $z = a_i$

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a_i) - \sum_j n_j \underbrace{\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(a_i)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = \mathrm{Ind}_\gamma(a_i) - n_i = 0$$

car $i \neq j \Rightarrow a_i \in D(a_j, R_j)$ où f holomorphe.

$(\Rightarrow a_i \in$ comp. connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma_j)$.



D'après la formule généralisée de Cauchy:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f = 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f - \sum_{j=1}^{N} n_j \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j} f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(a_j) \underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j} f}_{= \mathrm{Rés}_{a_j}(f)}$$

En effet: $\gamma_j \subset D'(a_j, R_j) = \{ 0 < |z - a_j| < R_j \}$

f a un développement en série de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a_j)^n \qquad \forall\, 0 < |z - a_j| < R_j$$

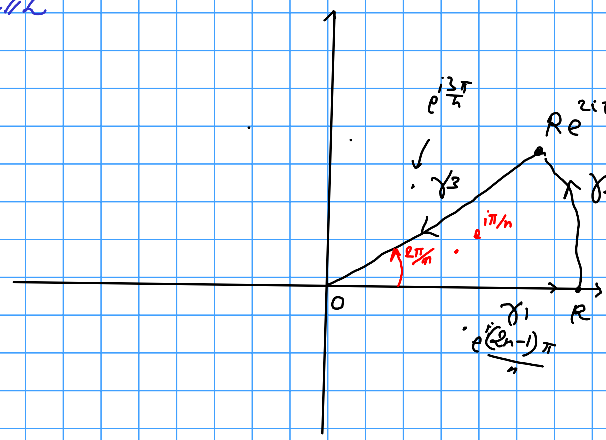
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2i\pi} \int_{\gamma_j} (z - a_j)^n \, dz$$

or $\displaystyle \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j} (z-a_j)^n \, dz = \begin{cases} \text{si } n = -1 : & \mathrm{Ind}_{\gamma_j}(a_j) = 1 \\ \text{si } n \neq -1 : & 0 \quad \text{car } (z-a_j)^n = \left(\dfrac{(z-a_j)^{n+1}}{n+1} \right)' \end{cases}$

donc $\displaystyle \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_j} f = c_{-1} = \mathrm{Rés}_{a_j}(f)$. $\square$

Exemple. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$ $\quad n \geq 2$

Soit $R>0$



$$\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [0,R] & \longrightarrow & [0,R] \\ t & \longmapsto & t \end{array}$$

$$\gamma_2 : \begin{array}{ccc} [0,\frac{2\pi}{n}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & Re^{it} \end{array}$$

$$\gamma_3 : \begin{array}{ccc} [0,R] & \longmapsto & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi/n}(R-t) \end{array}$$

$$\Omega = \mathbb{C}$$

Singularités non artificielles de $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$: $e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}}$ $\quad 0 \leq k \leq n-1$

Théorème des résidus Pour $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\mathrm{Ind}_\gamma\left(e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}}\right)}_{=0 \text{ si } k>0} \mathrm{Rés}_{e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}}}(f)$$

$$= \mathrm{Rés}_{e^{i\pi/n}}(f) = c_{-1}$$

$$\frac{1}{1+z^n} = \frac{c_{-1}}{z-e^{i\pi/n}} + \cdots \qquad c_{-1} = \frac{1}{(1+z^n)'(e^{i\pi/n})} = \frac{1}{ne^{i\pi\frac{n-1}{n}}} = \frac{-e^{i\pi/n}}{n}$$

On $\displaystyle\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f$

$$= \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} - e^{2i\pi/n}\int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \underbrace{\int_0^{2\pi/n} \frac{Ri e^{it}}{1+R^n e^{int}}\,dt}$$

$$\left|\quad\right| \leq R\frac{2\pi}{n}\frac{1}{R^n-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

donc (limite $R\to\infty$) $\displaystyle\frac{(1-e^{\frac{2i\pi}{n}})}{2i\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{e^{i\pi/n}}{n}$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n}}$$

Pause 5'

Théorème des extremas liés

Soit $f : \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{C}^1$

Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $\quad \mathcal{C}^1$

$$z \longmapsto (g_1(z), \dots, g_k(z))$$

On suppose 1) f a un minimum local sur $\{z \in \Omega : g(z) = 0\}$ en z_0

2) $D_{z_0} g$ de rang k

ALORS : $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\quad D_{z_0} f = \lambda_1 D_{z_0} g_1 + \dots + \lambda_k D_{z_0} g_k$

démo. Supposons $z = (\underbrace{x_1, \dots, x_{d-k}}_{x}, \underbrace{x_{d-k+1} \dots, x_d}_{y})$

$$J_{z_0}(g) = (D_{x_0} g \mid \underbrace{D_{y_0} g}_{\in GL_k(\mathbb{R})})$$

Alors théorème des fonctions implicites

$\exists\, x_0 \in U \subset \mathbb{R}^{d-k}$, $y_0 \in V \subset \mathbb{R}^k$ ouverts

et $\varphi : U \to V$ $\quad \mathcal{C}^1$, $\quad (x, y) \in U \times V$ et $g(x,y) = 0$

$\iff \quad y = \varphi(x)$.

Alors $F(x) = f(x, \varphi(x))$ a un minimum local en $x_0 \in U$

$\Rightarrow D_{x_0} F = 0 \quad \dots$

Exemples.

Exercice 3. Soit $f(x,y) = 2x^3 + y^4$. Calculer le maximum et le minimum de f sur l'ensemble
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(feuille 9)

f admet un maximum en un $(x_0, y_0) \in D$.

si $x_0^2 + y_0^2 < 1$ alors f a un maximum local en $(x_0, y_0) \in \overbrace{\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}}^{D^\circ}$

alors $df_{(x_0,y_0)} = 0 \Rightarrow \partial_{x_0} f = \partial_{y_0} f = 0 \iff \begin{cases} 6x_0^2 = 0 \\ 4y_0^3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x_0 = y_0 = 0.$

Or $f(0,0) = 0$ qui n'est ni maximum ni minimum local en $(0,0)$

$f(\varepsilon, 0) > 0$ si $\varepsilon > 0$

$f(-\varepsilon, 0) < 0$ si $\varepsilon > 0$

Donc le maximum est atteint en (x_0, y_0) tq $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Appliquer les extremas liés à f et $g = x^2+y^2-1$

$$D_{(x_0,y_0)} f = (\partial_{x_0} f, \partial_{y_0} f) = (6x_0^2, 4y_0^3) \in \mathbb{R}\, D_{(x_0,y_0)} g = \mathbb{R}(2x_0, 2y_0).$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} 6x_0^2 & 4y_0^3 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12\, x_0^2 y_0 - 8\, x_0 y_0^3 = 0$$

$$\Rightarrow 4x_0y_0\left[\underbrace{3x_0 - 2y_0^2}\right] = 0$$

$3x_0 - 2y_0^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x_0 = 2y_0^2 = 2(1-x_0^2)$

$\Rightarrow 2x_0^2 + 3x_0 - 2 = 0$

$\Rightarrow x_0^2 + \frac{3}{2}x_0 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Longrightarrow$ $x_0 = 0$ et $y_0 = \pm 1$
ou $x_0 = \pm 1$ et $y_0 = 0$
ou $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Or $f(x,y) = 2x^3 + y^4$

	$(0,\pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{3}}{2})$
$f(x,y)$	1	± 2	$13/16$

donc $\min\limits_{x^2+y^2\leq 1} f = \min\limits_{x^2+y^2=1} f = -2$ et $\max\limits_{x^2+y^2=1} f = 2$

— . —

Exemple de géodésique

Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$

on dit que $\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow S$ C^1 est une géodésique

si $\forall\, \gamma : [0,1] \to S$ C^1, tq $\gamma(0) = \gamma_0(0)$, $\gamma(1) = \gamma_0(1)$ alors $L(\gamma) \geq L(\gamma_0) = \int_0^1 \|\gamma'(t_0)\|\, dt_0$

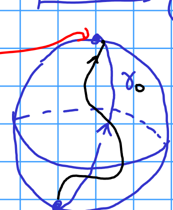
$\qquad\qquad \| $

$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt$

Exemple. $\gamma_0 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ est une géodésique

$t \longmapsto (\cos t, 0, \sin t)$

$\gamma(\frac{\pi}{2})$ " $(0,0,1)$



$\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (0,0,-1)$

C'est-à-dire : $\forall \gamma$ $\mathcal{C}^1$: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow S^2$

tq $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (0,0,-1)$, $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,0,1)$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\gamma'(t)\| \, dt \geq \int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma_0'(t)\| \, dt = \pi$$

indications : $S^2 = \left\{ (\cos t \cos\varphi, \cos t \sin\varphi, \sin t) : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$

et $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\gamma'(t)\| \, dt = \sup_{-\frac{\pi}{2} = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$

soit $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow S^2$ $\mathcal{C}^1$

$-\frac{\pi}{2} \longmapsto (0,0,-1)$

$\frac{\pi}{2} \longmapsto (0,0,1)$

Soit $-\frac{\pi}{2} = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \frac{\pi}{2}$

$\gamma_0(t_i) = (\cos t_i, 0, \sin t_i)$

alors $\exists$ $-\frac{\pi}{2} \leq t_0', \dots, t_N' \leq \frac{\pi}{2}$ / $\gamma(t_i') = (\cos t_i' \cos\varphi_i, \cos t_i' \sin\varphi_i, \sin t_i')$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\gamma'(t)\| \, dt \geq \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{\|\gamma(t_{i+1}') - \gamma(t_i')\| \geq \sum_{i=0}^{N-1} \|\gamma_0(t_{i+1}) - \gamma_0(t_i)\|} \rightarrow \int \|\gamma_0'\|$$

$\|(\cos t' \cos\varphi', \cos t' \sin\varphi', \sin t') - (\cos t \cos\varphi, \cos t \sin\varphi, \sin t)\|^2$

$\geq \|(\cos t', 0, \sin t') - (\cos t, 0, \sin t)\|^2$