Géométrie

2° **Orthocentre**

[correction]

a) Soit ABC un triangle non plat u plan affine. Montrer qu'il existe un triangle $A'B'C'$ tel que A $\cancel{A'}$ milieu de $B'C'$, $\cancel{B'}$ B milieu de $A'C'$ et $\cancel{C'}$ C milieu de $A'B'$. Comment tracer ce triangle ? uel est son isobarycentre ?

b) Montrer que les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A'B'C'$ et qu'elles sont donc concourantes.

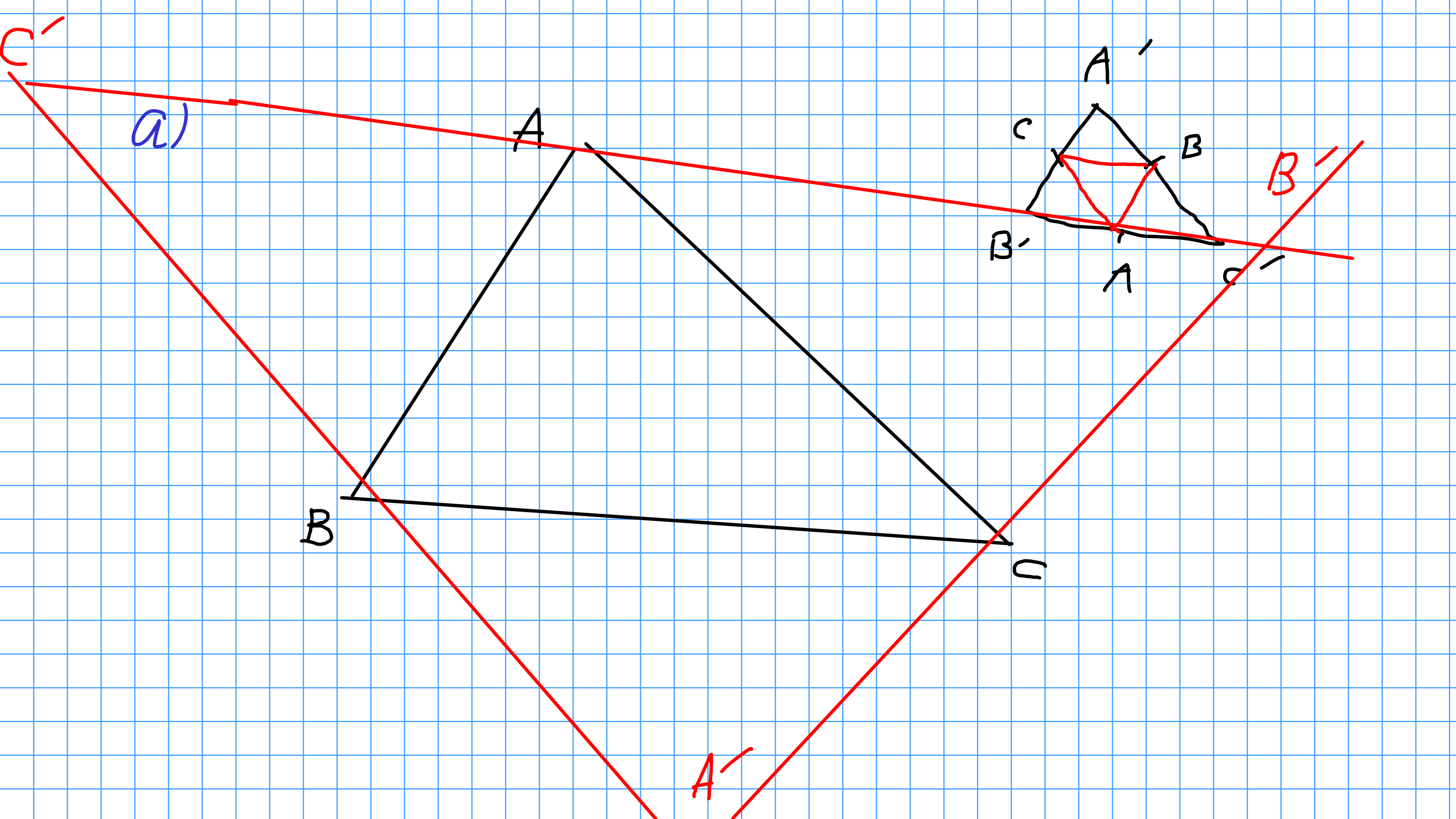
c) Montrer que $A'B'C'$ est l'image par l'homothétie de centre G (isobarycentre de ABC) et de rapport -2.

d) Soit I milieu de AB. Montrer que $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI}$.

e) On considère un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B ainsi qu'un point M qui décrit $\mathscr{C}$. On note H l'orthocentre de ABM. Montrer que H décrit le cercle symétrique à $\mathscr{C}$ par rapport à AB.

[correction]

f) [Cercle et droite d'Euler] Montrer que l'isobarycentre, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre de ABC sont alignés.Montrer que le cercle passant par le pied des hauteurs coupe les cotés en leur milieu.[correction]



Thalès $\Rightarrow (A'B') \parallel (AB)$, $(A'C') \parallel (AC)$, $(B'C') \parallel (BC)$

Barycentres.

$$A = \mathrm{Bar}((B',1),(C',1))$$
$$B = \mathrm{Bar}((A',1),(C',1))$$
$$C = \mathrm{Bar}((A',1),(B',1))$$

$$A = \mathrm{Bar}((A',\alpha),(B',\alpha'),(C',\alpha''))$$
$$B = \mathrm{Bar}((A',\beta),(B',\beta'),(C',\beta''))$$
$$C = \mathrm{Bar}((A',\gamma),(B',\gamma'),(C',\gamma''))$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \neq 0 \Leftarrow A, B, C \text{ affinement indépendants}$$

$\exists a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$,

$$A' = \mathrm{Bar}((A,a)(B,a')(C,a''))$$
$$B' = \mathrm{Bar}((A,b)(B,b')(C,b''))$$
$$C' = \mathrm{Bar}((A,c)(B,c')(C,c''))$$

Supposons $a+a'+a'' = b+b'+b'' = c+c'+c'' = \alpha+\alpha'+\alpha'' = \beta+\beta'+\beta'' = \gamma+\gamma'+\gamma'' = 1$

Associativité du barycentre $\Rightarrow$

$$A = \mathrm{Bar}\big((A, a\alpha)\ (B, a'\alpha)\ (C, a''\alpha)\ (A, b\alpha')\ (B, b'\alpha')\ (C, b''\alpha')$$
$$(A, c\alpha'')\ (B, c'\alpha'')\ (C, c''\alpha'')\big)$$
$$= \mathrm{Bar}\big\{(A, a\alpha + b\alpha' + c\alpha''),\ (B, a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'')\ (C, a''\alpha + b''\alpha' + c''\alpha'')\big\}$$
$$= \mathrm{Bar}\big((A,1), (B,0), (C,0)\big)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' = 1 \\ a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'' = 0 \\ a''\alpha + b''\alpha' + c''\alpha'' = 0 \end{cases}$$

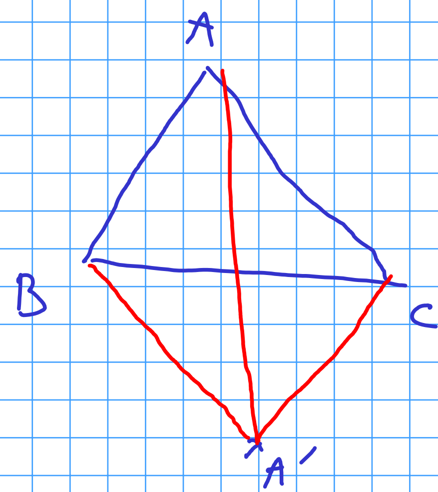
de même pour B et C

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}^{-1}$$

Ici $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

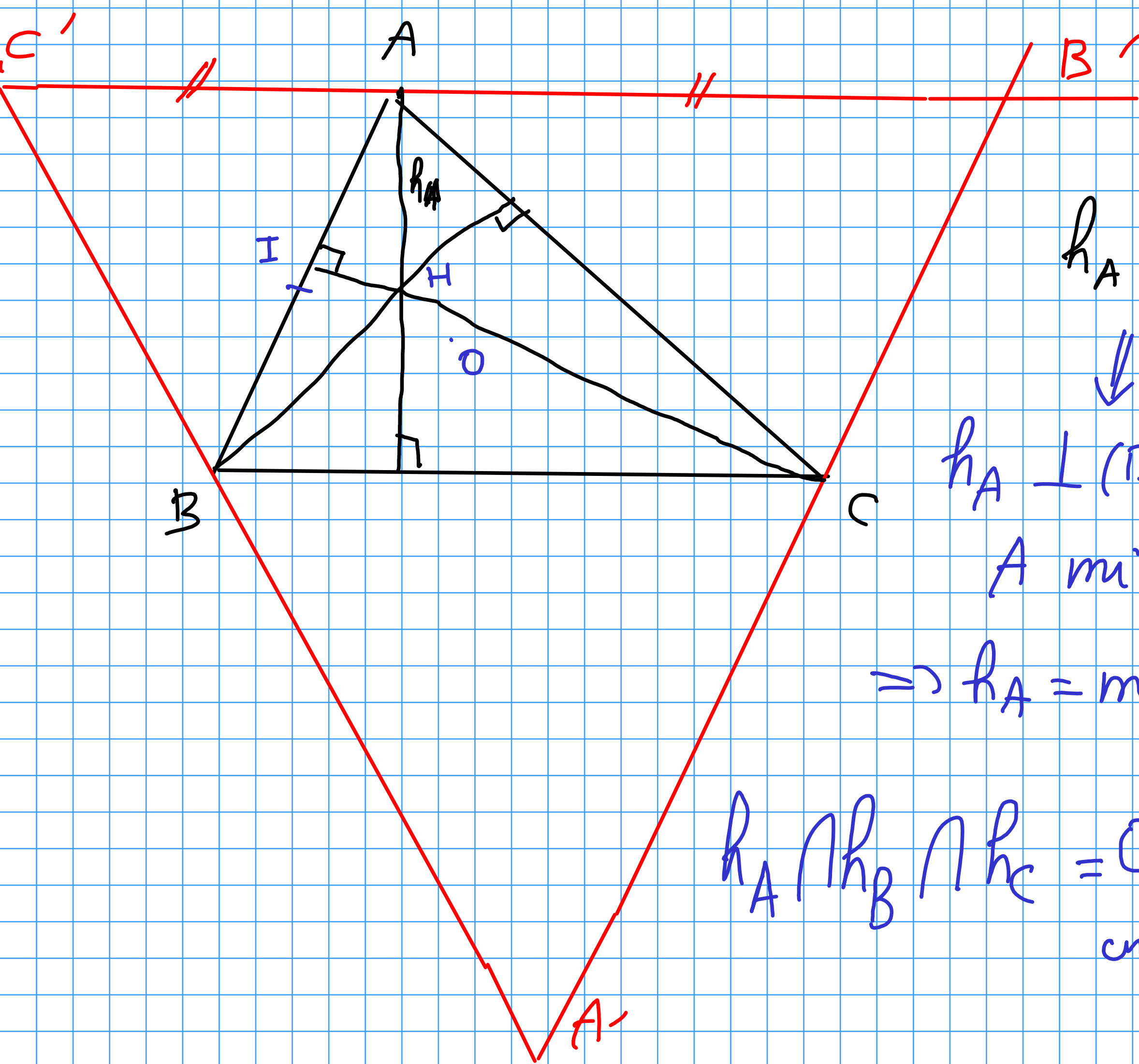
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A' = \mathrm{Bar}((A,-1), (B,1), (C,1))$
$B' = \mathrm{Bar}((A,1), (B,-1), (C,1))$
$C' = \mathrm{Bar}((A,1), (B,1), (C,-1))$



$$G \doteq \text{Bar}\big((A',1),(B',1),(C',1)\big) = \text{Bar}\big((A,-1),(B,1),(C,1),$$
$$(A,1),(B,-1),(C,1),$$
$$(A,1),(B,1),(C,-1)\big)$$

$$= \text{Bar}\big((A,1),(B,1),(C,1)\big) = G.$$



$h_A \perp (BC) // (B'C')$

$\Downarrow$

$h_A \perp (B'C')$ passe par A milieu de $[B'C']$

$\Rightarrow h_A =$ médiatrice de $[B'C']$

$h_A \cap h_B \cap h_C = O'$ centre du cercle circonscrit à $(A'B'C')$

$h_{G,-2}(A) = G - 2\overrightarrow{GA}$ homothétie de centre G de rapport −2.

$\overset{?}{=} A'$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} = -2\overrightarrow{GA}$

$\Leftrightarrow GA' + 2\overrightarrow{GA} = 0 \Leftrightarrow G = \underbrace{\mathrm{bar}((A',1),(A,2))}$

$= \mathrm{bar}((A',1),(B',1),(C',1))$

$= G'$ oui.

car A milieu de $[B'C']$

de même $h_{G,-2}(B) = B'$, $h_{G,-2}(C) = C'$.

2° **Orthocentre**

[correction]

a) Soit ABC un triangle non plat u plan affine. Montrer qu'il existe un triangle $A'B'C'$ tel que A' milieu de BC, B' milieu de AC et C' milieu de AB. Comment tracer ce triangle ? uel est son isobarycentre ?

b) Montrer que les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A'B'C'$ et qu'elles sont donc concourantes.

c) Montrer que $A'B'C'$ est l'image par l'homothétie de centre G (isobarycentre de ABC) et de rapport -2.

d) Soit I milieu de AB. Montrer que $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI}$. où O = centre du cercle circonscrit à (ABC)

e) On considère un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B ainsi qu'un point M qui décrit $\mathscr{C}$. On note H l'orthocentre de ABM. Montrer que H décrit le cercle symétrique à $\mathscr{C}$ par rapport à AB.

[correction] M=C

f) [Cercle et droite d'Euler] Montrer que l'isobarycentre, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre de ABC sont alignés. Montrer que le cercle passant par le pied des hauteurs coupe les cotés en leur milieu. [correction]

G O H

d) $H \overset{b)}{=} O'$ (centre du cercle circonscrit à $(A'B'C')$)

$= h_{G,-2}(O)$

$h_{G,-2}$: $A \longmapsto A'$, $B \longmapsto B'$, $C \longmapsto C'$

$\overrightarrow{h_{G,-2}}(\overrightarrow{OI}) = -2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{h_{G,-2}(O)\,h_{G,-2}(I)}$

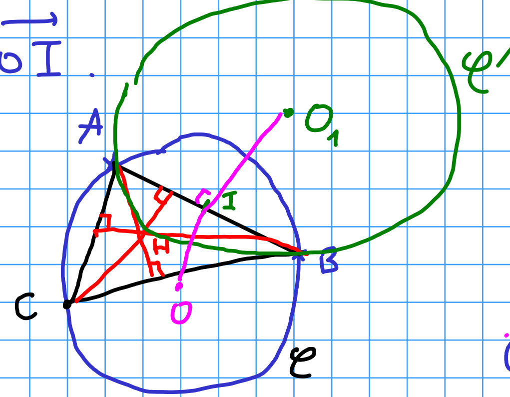
$= \overrightarrow{HC}$

$I \longmapsto C$

$\mathrm{Bar}(A,1)(B,1) \longmapsto \mathrm{Bar}(A',1)(B',1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI}$.

e)



$\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OO_1}$

$\overrightarrow{O_1H} = \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow O_1H = OC = OA = O_1A$

$\Rightarrow H \in \mathcal{C}'$ ...

f)

O, G, H alignés

$h_{G,-2} : O \mapsto H$
$\quad G \longmapsto G$

$\Rightarrow \overrightarrow{h_{G,-2}}(\overrightarrow{OG}) = -2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{HG}$

$\Rightarrow \boxed{3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}}$ ...

Pause

Analyse complexe

Séries de Laurent.

définition. Une série de Laurent est une fonction de la forme :

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{où}$$

$\exists\ 0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$,

$\forall\ |z-z_0| < R_2$, $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, |z-z_0|^n < \infty$

et $\forall\ |z-z_0| > R_1$ $\quad \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} |a_n|\, |z-z_0|^n}_{= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} |z-z_0|^{-n}} < \infty$

$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{R_1}\right)$

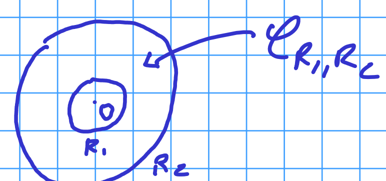
$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} |z-z_0|^{-n} < \infty$

ex.
$$\frac{1}{z-z^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \quad \forall\ 0<|z|<1$$

$$= \frac{-1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} \quad \forall |z|>1$$

Théorème de Laurent. Soit $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$

Soit $\mathcal{C}_{R_1,R_2} = \{ R_1 < |z| < R_2 \} \subset \mathbb{C}$



Si f holomorphe sur $\mathcal{C}_{R_1,R_2}$, alors $\exists! (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$,

$\forall R_1 < |z| < R_2$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$

$$\left(\forall_{R_1 <} |z| < R_2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n < \infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}| |z|^{-n} < \infty \right)$$

démo.

Formule de Cauchy généralisée

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (holomorphe sur Ω) où Ω ouvert de $\mathbb{C}$,

si γ = lacet (ou « somme » de lacets) [Si $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ lacets dans $\mathbb{C}$

$\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_N$, $\int_\Gamma = \int_{\gamma_1} + \dots + \int_{\gamma_N}$]

telles que : $\gamma \subset \Omega$

$$\forall z \notin \Omega, \quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$$

alors $\forall z \in \Omega \setminus \gamma$, $\quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \, dw$

démo (formule de Cauchy). Poser

$$H(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, dw & \text{si } z \in \Omega \\ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \, dw & \text{si } \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 \end{cases}$$

H est défini et holomorphe sur $\mathbb{C} = \Omega \cup \{ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 \}$

et $\lim_{|z| \to \infty} H(z) = 0 \underset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow} H = 0$ □.

Corollaire. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et si $\gamma \subset \Omega$ tq $\forall z \notin \Omega$ $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$

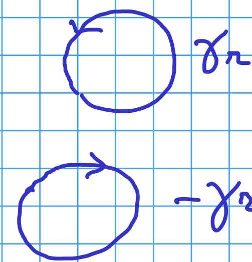
$$\text{alors } \int_\gamma f(w) \, dw = 0$$

[Appliquer formule généralisée à la fonction $\tilde{f}(w) = f(w)(w-z)$]

démo du théorème de Laurent.

Soient $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Soit $\Gamma = \gamma_{r_2} - \gamma_{r_1}$ où

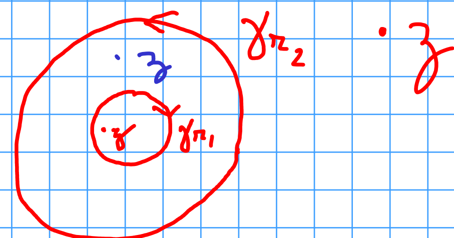
$$\gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto r e^{it}$$



Alors $\Gamma \subset \mathcal{C} = \{ R_1 < |z| < R_2 \}$

et $\forall z \notin \mathcal{C}$, $\quad \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$

En effet



si $|z| < r_1$, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_{r_2}}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_{r_1}}(z) = 1 - 1 = 0$

si $|z| > r_2$ $\quad \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_{r_2}}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_{r_1}}(z) = 0 - 0 = 0$

donc d'après la formule de Cauchy,

$$\forall r_1 < |z| < r_2, \quad \underbrace{\mathrm{Ind}_\Gamma(z)}_{=1} f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_2}} \qquad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_1}}$$

On $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w\left(1 - \frac{z}{w}\right)} dw = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w} \frac{z^n}{w^n} dw$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

et $-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi z} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{1 - \frac{w}{z}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi z} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w) w^n}{z^n} dw$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

De plus si $a_{n,r} = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw$ avec $R_1 < r < R_2$

indépendant de r.

alors $\boxed{a_{n,r} = a_{n,r'}}$ $\forall\ R_1 < r < r' < R_2$

car $\displaystyle\int_{\gamma_{r'} - \gamma_r} \dfrac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw = 0$ car $w \mapsto \dfrac{f(w)}{w^{n+1}}$

holomorphe sur $\mathcal{C}$.

et $\forall z \notin \mathcal{C}$ $\mathrm{Ind}_{\gamma_{r'} - \gamma_r}(z) = 0$.

Définition. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert

Soit $z_0 \in \Omega$.

On dit que $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ a une <u>singularité</u> en z_0

ALORS $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ $\forall\ 0 < |z - z_0| < r$

pour un r tq $|z - z_0| < r \Rightarrow z \in \Omega$.

Si $\forall\ n < 0$, $a_n = 0$ on dit que z_0 singularité artificielle

Si $\{n < 0 : a_n \neq 0\}$ est fini (nonvide) " " pôle

Si $\{n < 0 : a_n \neq 0\}$ est infini on dit que z_0 singularité essentielle

Résidu de f en z_0 est $\mathrm{Rés}_{z_0} f = a_{-1}$

<u>ex</u>. $\dfrac{1}{z^2}$ a pôle en 0

$e^{1/z}$ a singularité essentielle en 0.

Théorème des résidus. Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et f tq

$\forall z \in \Omega$, f holomorphe en z ou a une singularité en z.

Si $\gamma \subset \Omega \setminus \{\text{singularités de } f\}$ lacet tq $\forall z \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$

ALORS $$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{z \in \mathbb{C}} \mathrm{Rés}_z \cdot f \ \mathrm{Ind}_\gamma(z)$$

Pause

Calcul différentiel

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^2$, $\Omega \underset{\text{ouvert}}{\subset} \mathbb{R}^2$

Définition La $1^{\text{ère}}$ forme fondamentale de la surface paramétrée X est la matrice
$$I_X(u,v) = \begin{pmatrix} \|\partial_u X\|^2 & \partial_u X \cdot \partial_v X \\ \partial_u X \cdot \partial_v X & \|\partial_v X\|^2 \end{pmatrix}$$
$(\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

Ex. $X(u,v) = \left(u, v, \sqrt{R^2-u^2-v^2}\right)$ (sphère de rayon $R>0$)

$$I_X(u,v) = \begin{pmatrix} 1+\frac{u^2}{R^2-u^2-v^2} & \frac{uv}{R^2-u^2-v^2} \\ \frac{uv}{R^2-u^2-v^2} & 1+\frac{v^2}{R^2-u^2-v^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2-u^2-v^2}\begin{pmatrix} R^2-v^2 & uv \\ uv & R^2-u^2 \end{pmatrix}$$

Définition. Le plan tangent à la surface X en $(u,v) \in \Omega$ est le plan passant par $X(u,v)$ engendré par $\partial_u X$, $\partial_v X$ (s'ils sont linéairement indépendants)

et le vecteur normal en (u,v) est :
$$\vec{n} = \frac{\partial_u X \wedge \partial_v X}{\|\partial_u X \wedge \partial_v X\|}$$

ex. (sphère) $\vec{n} = \frac{1}{R}\left(u, v, \sqrt{R^2-u^2-v^2}\right)$

Définition. La $2^{\text{ème}}$ forme fondamentale de la surface X est
$$II_X(u,v) = \begin{pmatrix} \partial^2_{uu}X \cdot \vec{n} & \partial^2_{uv}X \cdot \vec{n} \\ \partial^2_{uv}X \cdot \vec{n} & \partial^2_{vv}X \cdot \vec{n} \end{pmatrix}$$

ex (Sphère)

$$\mathrm{II}_X(u,v) =$$

$$\partial_u X = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right) \qquad \partial_v X = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)$$

$$\partial^2_{uu} X = \left(0, 0, \frac{-\sqrt{R^2-u^2-v^2} - \frac{u^2}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}}{R^2-u^2-v^2}\right) = -\left(0, 0, \frac{R^2 - v^2}{(R^2-u^2-v^2)^{3/2}}\right)$$

$$\partial^2_{vv} X = -\left(0, 0, \frac{R^2-u^2}{(R^2-u^2-v^2)^{3/2}}\right)$$

$$\partial^2_{uv} X = \left(0, 0, \frac{-uv}{(R^2-u^2-v^2)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{R}\left(u, v, \sqrt{R^2-u^2-v^2}\right)$$

donc $\mathrm{II}_X(u,v) = -\dfrac{1}{R}\begin{pmatrix} \dfrac{R^2-v^2}{R^2-u^2-v^2} & \dfrac{uv}{R^2-u^2-v^2} \\ \dfrac{uv}{R^2-u^2-v^2} & \dfrac{R^2-u^2}{R^2-u^2-v^2} \end{pmatrix}$

Définition. La courbure de Gauss de X en (u,v) est :

$$\frac{\det \mathrm{II}_X(u,v)}{\det \mathrm{I}_X(u,v)}$$

Cas de la sphère : $\dfrac{\dfrac{1}{R^2(R^2-u^2-v^2)^2}\left((R^2-v^2)(R^2-u^2)-u^2v^2\right)}{\dfrac{1}{(R^2-u^2-v^2)^2}\left((R^2-v^2)(R^2-u^2)-u^2v^2\right)}$

$$= \frac{1}{R^2}.$$