Anneaux & corps

Corps finis

1) Caractéristique d'un corps

Soit K corps, $\varphi_K : \mathbb{Z} \longrightarrow K$
$$n \longmapsto \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}$$

est un morphisme d'anneaux

de noyau $\operatorname{Ker}\varphi_K = p\mathbb{Z}$ idéal premier car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \overset{\overline{\varphi_K}}{\hookrightarrow} K$ injectif $\Downarrow$ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ intègre

$n + p\mathbb{Z} \longmapsto \varphi_K(n)$

DONC $p = 0$ ou nombre premier

Définition.

p est la caractéristique de K

remarque : si $p \neq 0$, $p = \min\{n > 0 : \underbrace{1+\cdots+1}_{n} = 0\}$

Ex : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ de caractéristique 0

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =: \mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_p(X)$ de caractéristique p.

Définition. Soit p premier, Soit K corps de caractéristique p

alors $K \xrightarrow{f_p} K$ morphisme de corps.
$x \longmapsto x^p$

[démo : $\forall x, y \in K$ $(x+y)^p = x^p + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{p}{k}}_{=0} x^{p-k} y^k + y^p$ $\left(\forall 1 \leq k \leq p-1, p \mid \binom{p}{k}\right)$

$= x^p + y^p$]

$\boxed{\text{Le morphisme de Frobenius} = f_p}$

Remarque. $f_p^n = \underbrace{f_p \circ \cdots \circ f_p}_{n} : x \longmapsto x^{p^n}$

2) Corps finis

a) Cardinal

Soit K corps fini. Alors $\mathrm{car}(K) = p$ premier

donc $\mathbb{F}_p$ « $\subset$ » K

$\bar{x} \longmapsto \underbrace{1+\dots+1}_{x \text{ fois}} = x.1$

$\bar{x} = x + p\mathbb{Z}$

donc K est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie $=: d$

donc $(K,+) \simeq (\mathbb{F}_p^d, +)$ comme groupes

donc $\boxed{|K| = p^d}$.

exemples. a) $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj : a, b \in \mathbb{Z}\}$ où $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

(sous-anneau de $\mathbb{C}$)

$j^2 + j + 1 = 0$

$\mathbb{Z}[j]/(2) = \mathbb{F}_4$ corps de cardinal 4.

[$\mathbb{Z}[j]/(2) \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2+X+1, 2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2+X+1)$

$=$ corps car X^2+X+1 irréductible sur $\mathbb{F}_2$]

b) $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1) = \mathbb{F}_8$

$\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X^2+1) = \mathbb{F}_8$

Exercice. Trouver un isomorphisme de corps $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1) \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X^2+1)$

Indication : il suffit de trouver une racine α de X^3+X+1 dans $K = \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X^2+1)$

$\mathbb{F}_2[X] \longrightarrow K$

$r(X) \longmapsto r(\alpha)$

remarque : si $c_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9}$, $c_2 = 2\cos\frac{2\pi}{7}$

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1) \simeq \mathbb{Z}[c_1]/(2) \quad \text{et } \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X^2+1) \simeq \mathbb{Z}[c_2]/(2)$$

Théorème Existence et unicité

a) $\forall p$ premier, $\forall n \geq 1$, il existe un corps fini K de cardinal p^n

b) si K, K' corps de même cardinal p^n, alors $K \simeq K'$ (iso. de corps)

démo. Soit p premier, Soit $n \geq 1$

dans $\mathbb{F}_p[X]$: $$X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in I_d(p)} P$$ où $I_d(p) = \{P \in \mathbb{F}_p[X] : \deg P = d, \text{ unitaire irréductible}\}$

ex. $p=2$, $n=2$

$$X^4 - X = X(X-1)(X^2+X+1) \quad \text{dans } \mathbb{F}_2[X]$$

$p=2$, $n=3$ $$X^8 - X = X(X-1)(X^3+X+1)(X^3+X^2+1)$$

démo de la formule.

lemme. $\forall m, n \geq 1$, $\forall K$ corps, $X^m - 1 \wedge X^n - 1 = X^{m\wedge n} - 1$ (pgcd) dans $K[X]$.

et $\forall p > 1$, $p^m - 1 \wedge p^n - 1 = p^{m \wedge n} - 1$ dans $\mathbb{Z}$.

démo du lemme : si $m = bn + r$ division euclidienne de m par n

$b \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$

$$\begin{aligned}
X^m - 1 &= X^{bn+r} - X^r + X^r - 1 \\
&= X^r(X^{bn} - 1) + X^r - 1 \\
&= X^r((X^n)^b - 1) + X^r - 1 \\
&= X^r \underbrace{(X^n - 1)}(1 + X^n + \dots + (X^n)^{b-1}) + \underbrace{X^r - 1}_{\text{degré} = r < \deg(X^n - 1) = n} \quad (\text{dans } K[X])
\end{aligned}$$

Le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$ est $X^r - 1$ (dans $K[X]$)

$\Rightarrow$ $X^m - 1 \wedge X^n - 1 = X^n - 1 \wedge X^r - 1$ $\Rightarrow$ (récurrence sur n) ...

de même $p^m - 1 \wedge p^n - 1 = p^{m \wedge n} - 1$.

Démo de la formule.

Soit $P \in I_d(p)$. Alors $K = \mathbb{F}_p[X]/(P)$ corps de cardinal p^d

donc $\forall x \in K, \quad x^{p^d} = x$

$(\forall x \in K^*, \ x^{p^d - 1} = 1)$

donc $X^{p^d} = X \mod P$ donc $P \mid X^{p^d} - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$

Or $d \mid n \Rightarrow p^d - 1 \mid p^n - 1 \Rightarrow X^{p^d - 1} - 1 \mid X^{p^n - 1} - 1$

$\Rightarrow X^{p^d} - X \mid X^{p^n} - X$

$\Rightarrow P \mid X^{p^d} - X \mid X^{p^n} - X$.

$$\Rightarrow \prod_{d \mid n} \prod_{P \in I_d(p)} P \mid X^{p^n} - X.$$

Réciproquement si P irréductible unitaire facteur de $X^{p^n} - X$ et si $d = \deg P$.

alors si $d > 1$. alors $P \neq X \Rightarrow P \mid X^{p^n - 1} - 1$

Or $P \mid X^{p^d - 1} - 1$

[Dans $K = \mathbb{F}_p[X]/(P)$ de cardinal p^d, $\bar{X}^{p^d} = \bar{X} \Rightarrow P \mid X^{p^d} - X$]

donc $P \mid X^{p^d - 1} - 1 \wedge X^{p^n - 1} - 1 = X^{p^d - 1 \wedge p^n - 1} - 1 = X^{p^{d \wedge n} - 1} - 1$

donc si $d' = d \wedge n$, $\quad P \mid X^{p^{d'} - 1} - 1$

donc dans $K = \mathbb{F}_p[X]/(P)$, $x^{p^{d'} - 1} = 1$ avec $x = \bar{X}$

donc $x^{p^{d'}} = x \Rightarrow$ (le morphisme de Frobenius est un morphisme de corps)

$\forall y \in K, \ y^{p^{d'}} = y$

donc $|K| \leq p^{d'}$ [nombre de racines $\leq$ degré]

donc $p^d \leq p^{d'} \Rightarrow d \leq d' = d \wedge n \Rightarrow d = d' = d \wedge n$

$\Rightarrow d \mid n$.

Conclusion $$\boxed{X^{p^n} - X = \prod_{d \mid n} \prod_{P \in I_d(p)} P}$$

car $\underbrace{X^{p^n} - X}_{F}$ « sans facteur carré » dans $\mathbb{F}_p[X]$

(si P irréductible $\mid F$ alors $P^2 \nmid F$

car sinon $F = P^2 Q \Rightarrow P \mid F \wedge F' = 1$ absurde)

$F' = p^n X^{p^n - 1} - 1 = -1$ (caractéristique p)

démo de l'existence. $\underbrace{I_n(p) \neq \emptyset}$. $\Rightarrow$ $\forall n \; n I_n(p) \leq p^n$

Sinon. $$p^n = \sum_{d \mid n} d|I_d(p)| = \sum_{\substack{d \mid n \\ d < n}} d|I_d(p)| \leq \sum_{\substack{d \mid n \\ d < n}} p^d$$

$$\leq \sum_{d < n} p^d = p^n - 1$$

CONTRADICTION

Soit $P \in I_n(p)$. Alors $\mathbb{F}_p[X]/_{(P)}$ = corps de cardinal p^n.

<u>Unicité</u>. Soit K corps de cardinal p^n

Soit P irréductible de degré n sur $\mathbb{F}_p$

$\forall x \in K$, $x^{p^n} = x \Rightarrow X^{p^n} - X = \prod_{x \in K} (X - x)$ scindé sur K

Or $P \mid X^{p^n} - X$ donc P scindé sur K

donc $\exists \alpha \in K$, $P(\alpha) = 0$

d'où un morphisme $\mathbb{F}_p[X] \to K$ (d'anneaux)

$r(X) \longmapsto r(\alpha)$

« qui passe au quotient par P »:

$$\mathbb{F}_p[X]/(P) \xrightarrow{\cong} K$$

morphisme de corps $\Rightarrow$ injectif $\Rightarrow$ isomorphisme (car de mêmes cardinaux p^n)

Exercice.

Exercice 2. Un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$

1. Le nombre 2 est-il un carré dans $\mathbb{F}_5$?
2. Montrer que $P_0 := X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.
3. Soit $P(X) \in \mathbb{F}_5[X]$ un polynôme unitaire irréductible de degré 2. Rappeler pourquoi $\mathbb{F}_5[X]/(P)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_{25}$.
4. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5[X]/(P_0)$ et α la classe de X. Montrer que tout $\beta \in \mathbb{K}$ s'écrit de manière unique $a\alpha + b$ avec a et b dans $\mathbb{F}_5 = \{0, \pm1, \pm2\}$.
5. Soit $Q = X^5 - X + 1$. Montrer que Q n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_{25}$.
6. En déduire que Q est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.
7. En déduire que Q est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(partiel de 2023)

1) $\mathbb{F}_5 = \{0, \pm1, \pm2\}$ Carrés $= \{0, 1, -1\}$

2) $P_0 = X^2 + X + 1$, $\Delta(P_0) = 1^2 - 4 = -3 = 2$ dans $\mathbb{F}_5$

n'est pas un carré

$\Rightarrow P_0$ irréductible sur $\mathbb{F}_5$

3) $K = \mathbb{F}_5[X]/(P_0)$ $|K| = 5^2 \Rightarrow K = \mathbb{F}_{25}$

$= \{a\alpha + b : a, b \in \mathbb{F}_5\}$ $\alpha = X \bmod P_0$

5) $Q = X^5 - X + 1$

$$Q(a\alpha+b) = (a\alpha+b)^5 - (a\alpha+b) + 1 = a\alpha^5 + \cancel{b} - a\alpha - \cancel{b} + 1$$

$$= a\alpha^5 - a\alpha + 1$$

On $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ dans $K \Rightarrow \alpha^2 = -\alpha - 1 \Rightarrow \alpha^4 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$

$= -\alpha - 1 + 2\alpha + 1$

$= \alpha$

$\Rightarrow \alpha^5 = \alpha^2 = -\alpha - 1$

$$Q(a\alpha+b) = -a\alpha - a - a\alpha + 1 = -2a\alpha - a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ -a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \text{ IMPOSSIBLE}$$

Q n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_{25}$.

5) $\overset{?}{\Rightarrow}$ Q irréductible sur $\mathbb{F}_5$. $Q = X^5 - X + 1$

Q réductible $\Rightarrow$ $Q = Q_1 Q_2$ avec $Q_1, Q_2 \in \mathbb{F}_5[X]$ de degrés $\underbrace{1 \text{ et } 4}_{\text{NON car pas de racine}}$ ou 2 et 3

$\deg Q_1 = 2$ impossible

Si Q_1 (irréductible) de degré 2 alors Q_1 scindé sur $\mathbb{F}_{25}$

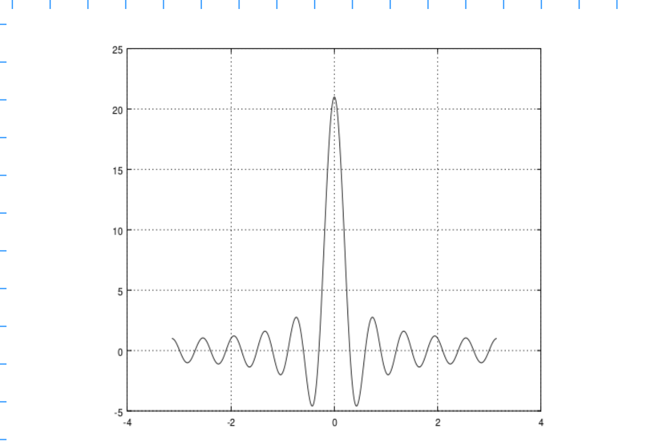
$\left(\forall x \in \mathbb{F}_{25},\ x^{25} = x \Rightarrow \underbrace{X^{25} - X}_{= X^{5^2} - X} \text{ scindé sur } \mathbb{F}_{25} \quad \text{or } Q_1 \mid X^{5^2} - X\right)$

Analyse fonctionnelle

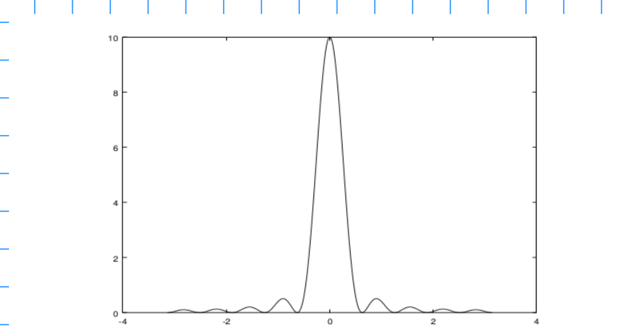
Noyau de Féjer

Définition $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ (Dirichlet)

$$F_n = \frac{D_0 + D_1 + \dots + D_n}{n+1} \qquad \text{(Féjer)}$$



$D_n,\ n = 10$



$F_n,\ n = 10$

Propriétés 1) $\forall y \in \mathbb{R},\quad F_n(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} y\right)}{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} & \text{si } y \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\forall y \in \mathbb{R},\quad F_n(y) \geq 0$

3) $\forall \quad 0<\delta<\pi$, $\lim\limits_{n\infty} F_n = 0$ uniformément sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} F_n = \int_{-\pi}^{0} F_n = \pi$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n = 2\pi$

5) Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ (continue 2π-périodique)

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ikx} \qquad \text{où } c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

$$T_n f(x) = \frac{1}{n+1}\left(S_0 f(x) + \dots + S_n f(x)\right)$$

alors $\displaystyle T_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_n(y)\, dy$

démo. 1) $(x \notin 2\pi\mathbb{Z})$

$$D_n(x) = e^{-inx}\, \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{-inx}\, \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2}}\, \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{\sin x/2}$$

$$= \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin x/2}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+\frac{1}{2})x}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}}\, \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}\right)$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\, \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi} D_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-k}^{k}\int_0^{\pi} e^{ilx}\, dx$

$$= \frac{1}{n+1}\Big[\pi + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{l=-k}^{k}\int_0^{\pi} e^{ilx}\, dx}_{\pi + 2\underbrace{\sum_{l=1}^{k}\int_0^{\pi}\cos lx\, dx}_{=0}}\Big] = \frac{(n+1)\pi}{n+1} = \pi$$

5) $\displaystyle T_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} c_l(f) e^{ilx}$$

Or, $\displaystyle c_l(f) e^{ilx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt} e^{ilx} \, dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{il(x-t)} \, dt$$

$y = x - t$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \underbrace{f(x-y) e^{ily}}_{2\pi\text{-périodique}} \, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{ily} \, dy.$$

donc $\displaystyle T_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{ily} \, dy$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) \, dy.$$

Théorème de Féjer Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ alors $\| \underbrace{T_n(f)}_{\text{"polynôme trigonométrique"}} - f \|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$

(Convergence uniforme)

Corollaire 1 Si $\forall k$, $c_k(f) = 0$, alors $f = 0$.

(vrai aussi pour $f \in L^1_{2\pi}$)

Corollaire 2 Les polynômes trigonométiques sont denses dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

démo du Théorème.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$T_n(f) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) F_n(y) \, dy$$

$$|T_n(f) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) \, dy$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|y|<\delta} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\leqslant \varepsilon} F_n(y) \, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{-\pi \leq y \leq \pi \\ |y| \geqslant \delta}} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) \, dy$$

Or f uniformément continue sur $[-\pi, \pi]$ donc sur $\mathbb{R}$

donc $\exists\, \delta > 0$, $\forall x, \forall |y| < \delta \quad |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$

Or $F_n \to 0$ uniformément sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$

donc $\exists N / \forall n \geq N \quad |F_n(y)| < \varepsilon \quad (\forall\, y \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi])$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad |T_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} F_n}_{\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n = 1} + 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\pi} \leq \varepsilon \left(1 + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\right)$

Probabilités

Lemme de Borel - Cantelli

Exercice 1. Lemme de Borel-Cantelli - Convergence p.s.
On rappelle que si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, alors

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Soit X_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles. La suite X_n converge presque sûrement (p.s. ou **P**-p.s.) vers une v.a. X si

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

1. Montrer que si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, les deux événements $\limsup_n A_n$ et $\{$une infinité des A_n est réalisée$\}$ sont égaux.
2. Supposons que les v.a. X_n, $n \geq 1$ sont indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et
$$\mathbf{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0).$$
   (a) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \to 0$.
   (b) Montrer que
$$\left\{X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} = \left(\limsup_n \{X_n = 1\}\right)^c.$$
   (c) Montrer que X_n converge p.s. vers 0 si et seulement si $\sum_n p_n < \infty$.
3. Montrer que $X_n \to +\infty$ p.s. si et seulement si
$$\forall M > 0, \ \mathbf{P}(\limsup_n \{X_n < M\}) = 0.$$

2) a) Soit $0<\varepsilon<1$ $\quad P(|X_n| \geq \varepsilon) = P(X_n = 1) = p_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

b) (X_n) indépendantes

$$\{\omega \in \Omega : \lim_{n\infty} X_n(\omega) = 0\} = \{\omega : \exists N, \forall n \geq N \ \ X_n(\omega) = 0\}$$
$$= \bigcup_N \bigcap_{n\geq N} \{X_n = 0\}$$

c) Si $\sum_n p_n < \infty$

$$\{\lim_n X_n = 0\}^c = \bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \{X_n = 1\}$$

or $\bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \{X_n = 1\} \subset \bigcap_{N=0}^{K} \bigcup_{n\geq N} \{X_n = 1\}$ $\quad (\forall K)$

et $P\left(\bigcap_{N=0}^{K} \bigcup_{n\geq N} \{X_n = 1\}\right) = P\left(\bigcup_{n\geq K}\{X_n = 1\}\right) \leq \sum_{n=K}^{\infty} p_n$

donc $\forall K$, $\quad P\left(\{\lim_n X_n = 0\}^c\right) \leq \sum_{n=K}^{\infty} p_n \underset{K\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow P\left(\{\lim X_n = 0\}^c\right) = 0 \Rightarrow P(\{\lim X_n = 0\}) = 1.$ donc $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$

Si $\sum_n p_n = +\infty$

union croissante

$$P(\{\lim_n X_n = 0\}) = P\left(\bigcup_N \bigcap_{n\geq N} \{X_n = 0\}\right)$$

$$= \lim_{p\to\infty} P\left(\bigcup_{N=0}^{p} \bigcap_{n\geq N} \{X_n=0\}\right)$$

$$= \lim_{p\to\infty} P\left(\bigcap_{n\geq p} \{X_n=0\}\right)$$

Or $\forall q \geq p$, $\bigcap_{n\geq p} \{X_n=0\} \subset \bigcap_{n=p}^{q} \{X_n=0\}$

donc $\forall p, \forall q\geq p$ $P\left(\bigcap_{n\geq p}\{X_n=0\}\right) \leq P\left(\bigcap_{n=p}^{q}\{X_n=0\}\right)$

$$\leq \prod_{n=p}^{q} (1-p_n)$$

Or $\forall\ 0\leq x\leq 1$, $1-x \leq e^{-x}$

donc $\forall p, \forall q \geq p$, $P\left(\bigcap_{n\geq p}\{X_n=0\}\right) \leq \prod_{n=p}^{q} e^{-p_n} = e^{-\sum_{n=p}^{q} p_n} \xrightarrow[q\infty]{} 0$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n\geq p}\{X_n=0\}\right)=0 \quad (\forall p)$$

En résumé $X_n \xrightarrow{P} 0 \iff \lim p_n = 0$

$X_n \xrightarrow{p.s.} 0 \iff \sum_n p_n < \infty$

En particulier, $\lim P \not\Rightarrow \lim p.s.$

Fonctions de répartition

Définition. Soit X v.a. réelle, on note $F_X(t) = P(X\leq t)$

On dit que F_X est la fonction de répartition associé à X.

Propriétés. 1) F_X croissante, positive

2) $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$

3) $\forall x$, $F_X(x^+) = F_X(x)$ (continuité à droite)

c-à-d. $\lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} F_X(t) = F_X(x)$

[3) si $t_n \downarrow x$ avec $\forall n\ t_n > x$, alors $\{X>x\} = \bigcup_n \{X>t_n\}$ union croissante donc $P(X > x) = \lim_n P(X > t_n)$

$\Leftrightarrow \quad 1 - F_X(x) = \lim_n 1 - F_X(t_n)$

$\Leftrightarrow \quad \lim_n F_X(t_n) = F_X(x)$]

Réciproque : si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie 1), 2), 3)

alors $\exists X$ v.a, $F = F_X$.

(TD6)

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction F_n définie par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

1. Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable X_n dont on donnera la loi.
2. $(X_n)_n$ converge-t-elle en loi ? NON

1) $P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < n \\ 1 \text{ si } x \geq n \end{cases}$

$P(X_n = n) = 1 \quad P(X_n \neq n) = 0$; $F_n = \mathbb{1}_{\{x=n\}}$

2) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall f$ continue bornée, $E(f(X_n)) \xrightarrow[n \infty]{} E(f(X))$

Or $E(f(X_n)) = f(n)$ ne converge pas en général.

donc NON.