Anneaux et corps

Extensions de Corps

Théorème - définition

Soient $K \leq L$ corps

Si $x \in L$ alors sont équivalentes :

(i) $\exists\, 0 \neq P(X) \in K[X]$, $P(x) = 0$

(ii) $K[x] = \{ a(x) \,;\, a(X) \in K[X] \}$ est de dimension finie comme K-ev

(iii) $K[x]$ corps (c-à-d $K[x] = K(x) := \left\{ \frac{a(x)}{b(x)} \,;\, \begin{array}{l} a(X), b(X) \in K[X] \\ b(x) \neq 0 \end{array} \right\}$)

Dans ce cas x est <u>algébrique sur K</u>

et $\dim_K K[x] = [K[x] : K] =$ degré de x sur K
$= \deg \pi_x$

où π_x est le polynôme unitaire dans $K[X]$ tel que

$$(\pi_x) = I_x = \{ P(X) \in K[X] \,;\, P(x) = 0 \}$$

Remarque : π_x est de degré minimal parmi I_x.

On dit que π_x est le polynôme minimal de x sur K.

démo. (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$K[X] \xrightarrow{\varphi_x} K[x]$$
$$a(X) \longmapsto a(x)$$

morphisme d'anneaux surjectif

de noyau $\operatorname{Ker}\varphi_x = \{P \in K[X] : P(x) = 0\}$

Soit $0 \neq P(X) \in \operatorname{Ker}\varphi_x$, $(P) \leq \operatorname{Ker}\varphi_x$

d'où un morphisme $\overline{\varphi_x} : K[X]/(P) \longrightarrow K[x]$
$$a(X) + (P) \longmapsto a(x)$$

surjectif.

Donc $\dim K[x] \leq \dim K[X]/(P) = \deg P < \infty$

(car $(\bar{1}, \bar{X}, \ldots, \bar{X}^{\deg P - 1})$ est une base de $K[X]/(P)$)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit $\underset{\neq 0}{\lambda} \in K[x]$. $K[x] \xrightarrow{m_\lambda} K[x]$
$$a \longmapsto \lambda a$$

L'application m_λ est K-linéaire et injective

(car $\lambda a = 0$ dans $K[x] \subset L$
$\Rightarrow a = 0$)

si $\dim K[x] < \infty$, alors m_λ injectif $\Rightarrow$ surjectif

$\Rightarrow \exists\, b \in K[x], m_\lambda(b) = 1 \Leftrightarrow \lambda b = 1$.

c-à-d $b = \lambda^{-1} \in K[x]$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

si $K[x]$ corps, alors $K[X] / \mathrm{Ker}\,\varphi_x \simeq K[x]$

corps $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\varphi_x$ maximal

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\varphi_x \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists\, 0 \neq P \in \mathrm{Ker}\,\varphi_x$ c-à-d $P(x) = 0$

Exemples: $\alpha = \sqrt[3]{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ car $\alpha^3 - 2 = 0$

$e = \exp(1)$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$ (non algébrique)

Corollaire. Si $x, y \in L$ sont algébriques sur K alors $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$ $(\text{si } y \neq 0)$ aussi.

démo. $K \leq K(x) \leq K(x)(y)$

x algébrique sur K $\Longrightarrow$ $[K(x) : K] = d_x < \infty$

y algébrique sur K $\Rightarrow$ sur $K(x)$ $\Rightarrow [K(x)(y) : K(x)] = d_y < \infty$

On Lemme de multiplicativité des degrés.

si $K_1 \leq K_2 \leq K_3$ corps alors

$$[K_3 : K_1] = [K_3 : K_2]\,[K_2 : K_1]$$

$$|I \times J| = |I| \cdot |J|$$

(démo du lemme : si $(e_i)_{i\in I}$ base de K_2 comme K_1-ev

si $(f_j)_{j\in J}$ base de K_3 comme K_2-ev

alors $(e_i f_j)_{i\in I, j\in J}$ base de K_3 comme K_1-ev

car si $y \in K_3$, $y = \sum_{\substack{j \\ \text{finie}}} \lambda_j f_j$ où $\lambda_j \in K_2$

$\forall j \quad \lambda_j = \sum_{\substack{i \\ \text{finie}}} x_{ij} e_i$ où $\forall ij \; x_{ij} \in K_1$

$$\Rightarrow y = \sum_j \sum_i x_{ij} e_i f_j \quad \ldots)$$

donc $[K(x,y):K] = \underbrace{[K(x,y):K(x)]}_{d_y} \underbrace{[K(x):K]}_{d_x} < \infty$

donc $\forall z \in K(x,y)$, $[K(z):K] \leq [K(x,y):K] < \infty$

$\Rightarrow z$ algébrique.

Or $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y} \in K(x,y)$ $\square$

Exercice 8. Déterminer les degrés des extensions de corps suivantes : $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ et $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

(td sur les corps)

$X^2 - 2$ est le polynôme minimal de $\sqrt{2}$ sur $\mathbb{Q}$

REMARQUE. Si $P \in K[X]$. Alors $P = \Pi_x \Leftrightarrow P$ unitaire et $P(x) = 0$ et P irréductible.

X^3-2 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (Eisenstein avec $p=2$)

$\Rightarrow X^3-2$ polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ sur $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = 3$.

$$\underbrace{\mathbb{Q}(\sqrt{2},i) \geqslant \mathbb{Q}(\sqrt{2})}_{\substack{(X^2+1)(i)=0 \\ 2}} \underbrace{\geqslant \mathbb{Q}}_{2} \Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt{2},i):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2},i):\mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = 4.$$

(X^2+1) irréductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ car $\pm i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Remarque :

Soit $\alpha = \sqrt{2}+i$ $\quad \alpha^2 = 2-1+2i\sqrt{2} = 1+2i\sqrt{2}$

$\Rightarrow (\alpha^2-1)^2 = -8 \Leftrightarrow \alpha^4-2\alpha^2+9=0$

$\therefore$ $P = X^4-2X^2+9 \in \mathbb{Q}[X]$

car $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$

$\subset$

$\supset$ $\quad \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+i} = \dfrac{\sqrt{2}-i}{3}$

$\Rightarrow \alpha + \dfrac{3}{\alpha} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

$\alpha - \dfrac{3}{\alpha} = 2i \Rightarrow i \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Donc $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},i) \Rightarrow [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 4$

$\Rightarrow \deg \Pi_\alpha = 4 \Rightarrow \Pi_\alpha = X^4-2X^2+9$

$\Rightarrow X^4-2X^2+9$ irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 9. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\boxed{\mathbb{Q}(2^{1/6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})}$ et que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 6$. (Indication : pour la dernière égalité, donner une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$).

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$

$\supseteq$

$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2}^3, \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2}^2$

$\sqrt{}$: $\sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

$[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}):\mathbb{Q}] = 6$ car X^6-2 irréductible sur $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ a pour base $(1, \sqrt[6]{2}, \underset{\sqrt[3]{2}}{\underset{\parallel}{\sqrt[6]{2}^2}}, \underset{\sqrt{2}}{\underset{\parallel}{\sqrt[6]{2}^3}}, \underset{(\sqrt[3]{2})^2}{\underset{\parallel}{\sqrt[6]{2}^4}}, \sqrt[6]{2}^5)$

ou bien : $(1, \sqrt{2})$ base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ comme $\mathbb{Q}$-ev

$(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2)$ base de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$ comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-ev

[X^3-2 n'a pas de racine α dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sinon $\underset{3}{\underset{\parallel}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}} \mid \underset{2}{\underset{\parallel}{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]}}$ absurde!)

donc $(1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}^2, \sqrt[3]{2}^2\sqrt{2})$ base de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$ comme $\mathbb{Q}$-ev.

Analyse fonctionnelle

Convergence des séries de Fourier

Théorème de Fatou Soit $f \in L^2(]-\pi,\pi[)$

dans L^2, $\displaystyle \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to+\infty}} \sum_{k=M}^{N} c_k(f)\, e^{ikx} = f$

où $\displaystyle c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$

c-à-d : $\displaystyle \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to+\infty}} \left\| \sum_{k=M}^{N} c_k(f) e^{ikx} - f \right\|_{L^2} = 0$

Corollaire : Égalité de Parseval $\displaystyle \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$

$\forall f \in L^2(]-\pi,\pi[)$

En effet

$L^2(]-\pi,\pi[)$ est un espace de Hilbert pour $\displaystyle \langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}$

et $(e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base de Hilbert

Théorème (Riesz-Fischer)

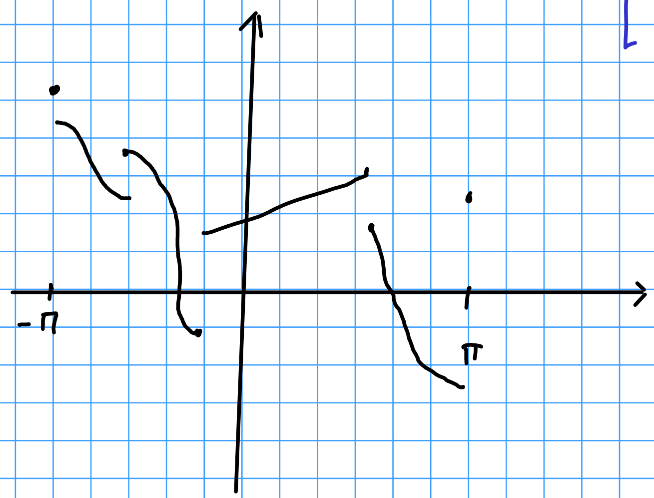
$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ c-à-d $\displaystyle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty$

$\exists!\, f \in L^2(]-\pi,\pi[)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = a_n$.

Théorème de Dirichlet Soit f $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi,\pi]$

c-à-d : $\exists$ $-\pi = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = \pi$,

$\forall\ 0 \leq i \leq N-1 \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } a_i < x < a_{i+1} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a_{i+1} \\ x < a_{i+1}}} f(x) =: f(a_{i+1}^-) \\ \lim\limits_{\substack{x \to a_i \\ x > a_i}} f(x) = f(a_i^+) \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$



Alors $\forall\ -\pi \leq x \leq \pi$, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

où $f(x^+) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t) \qquad f(x^-) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t)$

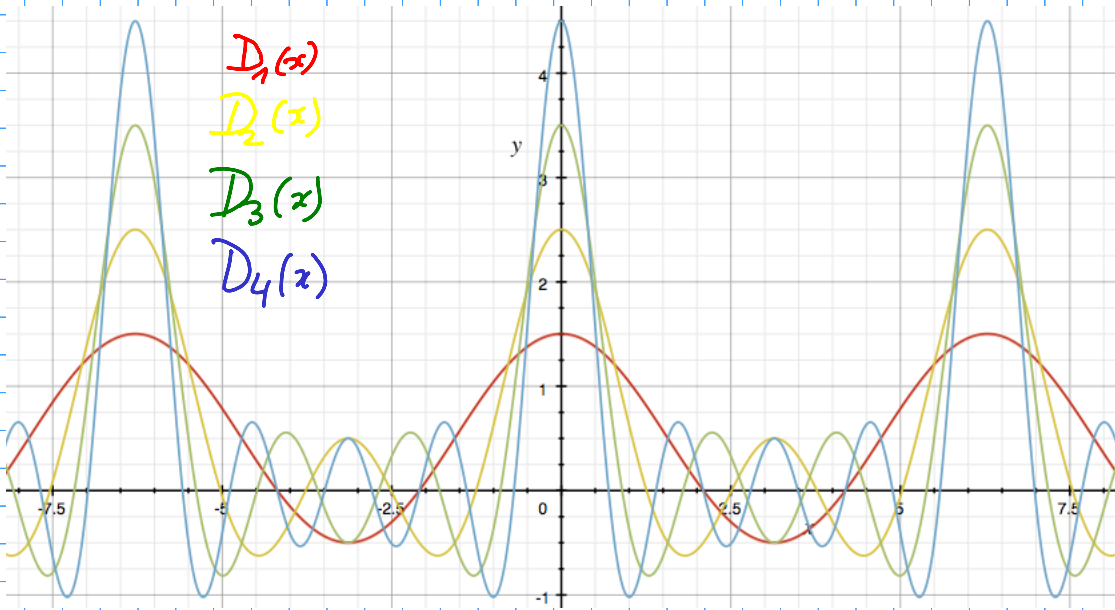
où : $f(-\pi^-) := f(\pi^-) \qquad f(\pi^+) = f(-\pi^+)$

démo. On pose $S_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$

$D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ (Noyau de Dirichlet)

$$= e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \cancel{e^{-inx}} \frac{\cancel{e^{i(n+\frac{1}{2})x}}}{\cancel{e^{ix/2}}} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$



Propriétés de D_n : $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$

car $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx}_{=0 \text{ si } k\neq 0} = 1$

On prolonge f en une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
(quitte à changer la valeur en π)

$$S_n f(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ikx} - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} f(t)\, e^{-ikt} e^{ikx}\,dt - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{ik(x-t)}\,dt - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$y = x - t$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{iky}\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\,\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(f(x-y) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right) e^{iky}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-y) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \right) D_n(y)\, dy \qquad D_n(-y) = D_n(y)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{f(x-y)-f(x^+)}{\sin y/2} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\, dy}_{=:A_n} + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x-y)-f(x^-)}{\sin y/2} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\, dy$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} h(y) \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\, dy \quad \text{où } h(y) = \frac{f(x-y)-f(x^+)}{\sin y/2}$$

h est continue par morceaux sur $[-\pi, 0]$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_n(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x-y) D_n(y)\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-y) D_n(y)\, dy$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x^+)}{2} D_n(y)\, dy = \frac{1}{4\pi} f(x^+)\, 2 \int_{-\pi}^{0} D_n(y)\, dy \quad \text{car } D_n(y) = D_n(-y)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x^+) D_n(y)\, dy$$

de même $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x^-)}{2} D_n(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(x^-) D_n(y)\, dy$.

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} h(y) \sin ny \cos y/2\, dy + \int_{-\pi}^{0} h(y) \cos ny \sin y/2\, dy \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Lemme de Riemann-Lebesgue Si $F \in L^1([-\pi, \pi])$ alors

$$c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny}\, dy \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

[démo si $F = \chi_{[a,b]}$ $-\pi \le a < b \le \pi$ $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_{a}^{b} e^{-iny}\, dy = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{in}\right) \left[e^{-inb} - e^{-ina}\right] \xrightarrow[n\infty]{} 0$]

de même $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x-y)-f(x^-)}{\sin y/2} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\, dy \xrightarrow[n\infty]{} 0$

$\square$

Exercice # 8. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x) := |x|$. En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$.

$f(x) = |x|$ si $-\pi < x \leq \pi$

si $-\pi+2k\pi < x \leq -\pi+2(k+1)\pi$, on pose $f(x) = |x-2k\pi|$.

$$c_k(f) = \underbrace{\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } k=0 \\ -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^k}{k^2}\right] & \end{cases}}_{= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \neq 0 \\ -\frac{2}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$\lim_{n\infty} S_n f(0) = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = f(0) = 0$$

On :

$$S_n f(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} c_k(f) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{n} \frac{(-2)}{\pi k^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Probalités

Loi faible des grands nombres

Théorème. Soient X_n, $n \in \mathbb{N}$, des v.a i.i.d. (indépendantes) de loi X.

Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{var(X)}{n\varepsilon^2}$

En particulier $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E(X)$ (convergence en probabilités)

Corollaire $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\lim_{n\infty} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\infty]{} f(E(X))$$

(car convergence en proba $\Rightarrow$ convergence en loi)

démo du théorème : $\varepsilon P(Y \geq \varepsilon) \leq E(Y)$ (si Y positive)

Soit $Y = \left(\frac{S_n}{n} - E(X)\right)^2$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) = P(Y \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(Y)$$

or $E(Y) = E\left(\frac{S_n^2}{n^2} - 2E(X)\frac{S_n}{n} + E(X)^2\right) = E\left(\frac{S_n^2}{n^2} - E(X)^2\right)$

car $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\, E(X)$

et $E(S_n^2) = var(S_n) + E(S_n)^2 = var(S_n) + n^2 E(X)^2$

$\underset{\text{(indépendance)}}{=} n\, var(X) + n^2 E(X)^2$

d'où $E(Y) = \dfrac{var(X)}{n}$ $\square$

Exercice 3. Loi des grands nombres

Déterminer, sans calcul, les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) dx_1...dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p \in [0,1]$.

(feuille 5)

2) X_n va iid de loi X : $P(X=1) = p$ $P(X=0) = (1-p)$

Loi de S_n : $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, f bornée

$$\Rightarrow E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\xrightarrow[n\infty]{} f(E(X)) = f(p)$$

où $E(X) = p$

1) $X_i, i \in \mathbb{N}$ va iid de loi $P(X \leq t) = t$ $(\forall 0 \leq t \leq 1)$

Comme les va sont indépendantes,

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = x_1 \cdots x_n$$

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n \xrightarrow[n\infty]{} f(E(X)) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

où $E(X) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 9.

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables iid de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner la loi de $X_1 + \dots + X_n$.
2. Déterminer sans calcul $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.

$$P(X_\lambda = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P(X_\lambda + X_\mu = k) = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

---

si X_i, $i \in \mathbb{N}$, va iid de loi $\left(P(X_i = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \ (\forall i)\right)$

$$P(S_n = k) = e^{-(n\lambda)}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\lambda n}\frac{(\lambda n)^k}{k!} \longrightarrow f(E(X)) = f(\lambda).$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$