Barycentres

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel

soient $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{E}$

soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$

si $\boxed{\alpha_1 + \dots + \alpha_N \neq 0}$, $M + \dfrac{\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_N \overrightarrow{MA_N}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_N} \in \mathcal{E}$

est indépendant de M.

[En effet, $\forall N \in \mathcal{E}$, $M + \dfrac{\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_N \overrightarrow{MA_N}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}$

$$= M + \frac{\alpha_1 \overrightarrow{MN} + \alpha_1 \overrightarrow{NA_1} + \dots + \alpha_N \overrightarrow{MN} + \alpha_N \overrightarrow{NA_N}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}$$

$$= \underbrace{M + \overrightarrow{MN}}_{= N} + \frac{\alpha_1 \overrightarrow{NA_1} + \dots + \alpha_N \overrightarrow{NA_N}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_N} \quad]$$

Définition $G = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_N, \alpha_N))$

$$= M + \frac{\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_N \overrightarrow{MA_N}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_N} \quad (\forall M \in \mathcal{E}).$$

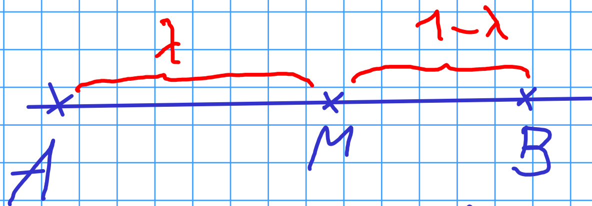
remarques. a) $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_N \overrightarrow{GA_N} = \overrightarrow{0}$

G est l'unique point de $\mathcal{E}$ tq

b) si $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 0$, alors le vecteur $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_N \overrightarrow{MA_N}$ est constant (indépendant de M)

Propriétés 1) si $M = Bar((A,\alpha)(B,\beta))$ avec $A \neq B$

$\alpha + \beta \neq 0$ alors A, M, B alignés



2) si $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$M = Bar(A, 1-\lambda)(B, \lambda)$$

(car $\overrightarrow{AM} - \lambda \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{BM} = \vec{0}$)

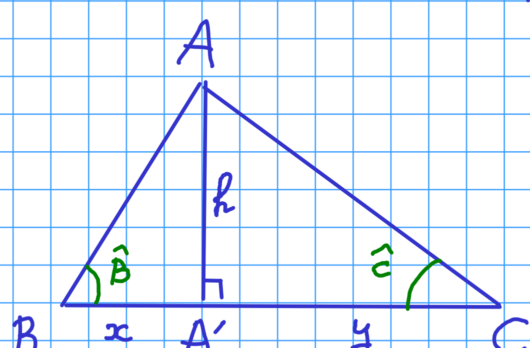
Remarque importante. si $\alpha_1 + \dots + \alpha_N \neq 0$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0},\ Bar((A_1, \alpha_1), \dots, (A_N, \alpha_N)) = Bar((A_1, x\alpha_1), \dots, (A_N, x\alpha_N))$$

si $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$, alors $M = Bar((A, 1)(B, \frac{\lambda}{1-\lambda}))$

$$= Bar((A,1), (B, \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}))$$

Exemple.



$A' = Bar((B, y)(C, x))$ Or $\frac{h}{y} = \tan \hat{C}$, $\frac{h}{x} = \tan \hat{B}$

$\Rightarrow A' = Bar((B, \frac{h}{\tan \hat{C}}), (C, \frac{h}{\tan \hat{B}})) = Bar((B, \tan \hat{B}), (C, \tan \hat{C}))$

Théorème Associativité

Soient $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{E}$

soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$

Supposons $\alpha_1 + \dots + \alpha_m, \beta_1 + \dots + \beta_n, \alpha_1 + \dots + \alpha_m + \beta_1 + \dots + \beta_n \neq 0$

Alors

$$\mathrm{Bar}\big(\underbrace{(A_1,\alpha_1), \dots, (A_m,\alpha_m)}_{G_1}, \underbrace{(B_1,\beta_1), \dots, (B_n,\beta_n)}_{G_2}\big)$$

$$= \mathrm{Bar}\big((G_1, \alpha_1 + \dots + \alpha_m), (G_2, \beta_1 + \dots + \beta_n)\big) =: G$$

où $G_1 = \mathrm{Bar}((A_1,\alpha_1), \dots, (A_m,\alpha_m))$ et $G_2 = \mathrm{Bar}((B_1,\beta_1), \dots, (B_m,\beta_n))$

démo. $(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)\overrightarrow{GG_1} + (\beta_1 + \dots + \beta_n)\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$

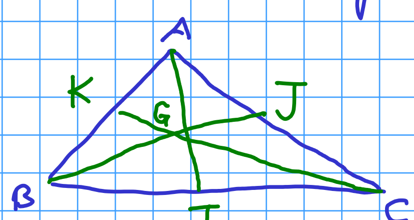
$\iff \alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_1\overrightarrow{A_1G_1} + \dots + \alpha_m\overrightarrow{GA_m} + \alpha_m\overrightarrow{A_mG_1} + \beta_1\overrightarrow{GB_1} + \beta_1\overrightarrow{B_1G_2} + \dots = \vec{0}$

$\iff \alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_m\overrightarrow{GA_m} + \beta_1\overrightarrow{GB_1} + \dots + \beta_n\overrightarrow{GB_n} + \underbrace{(\alpha_1\overrightarrow{A_1G_1} + \dots + \alpha_m\overrightarrow{A_mG_1})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\beta_1\overrightarrow{B_1G_2} + \dots)}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\iff \alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_m\overrightarrow{GA_m} + \beta_1\overrightarrow{GB_1} + \dots + \beta_n\overrightarrow{GB_n} = \vec{0}$.

Applications.

1) les médianes d'un triangle sont concourantes

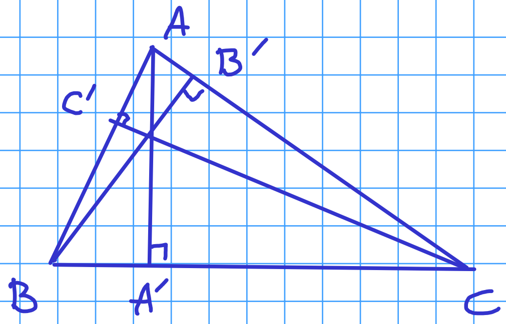


En effet : Soit $G = \mathrm{Bar}((A,1)\underbrace{(B,1)(C,1)}_{I}) = \mathrm{Bar}((A,1),(I,2))$

où $I = \mathrm{Bar}((B,1),(C,1)) = $ milieu de $[BC]$

$\Rightarrow G \in (AI)$ de même $G \in (BJ) \cap (CK)$.

2) L'orthocentre



$A' = \mathrm{Bar}((B, \tan\hat{B}), (C, \tan\hat{C}))$

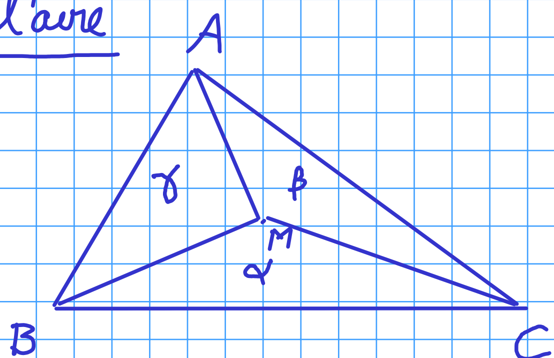
$B' = \mathrm{Bar}((A, \tan\hat{A}), (C, \tan\hat{C}))$

$C' = \mathrm{Bar}((A, \tan\hat{A}), (B, \tan\hat{B}))$

Soit $\boxed{H = \mathrm{Bar}\left((A, \tan\hat{A}), \overbrace{(B, \tan\hat{B}), (C, \tan\hat{C})}^{A'}\right)}$

Alors $H \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$ est l'orthocentre.

Formule de l'aire



α = aire orientée de $\widehat{MBC}$

β = aire orientée de $\widehat{MCA}$

γ = aire orientée de $\widehat{MAB}$

où aire de $\widehat{MBC} = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$.

Rappel

$D = \det(\vec{u}, \vec{v})$ = aire du parallélogramme

ALORS $\boxed{M = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))}$

démo. Soit $M = \mathrm{Bar}((A, x), (B, y), (C, z))$ avec $x + y + z = 1$

Alors $x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{BM} + z\overrightarrow{CM} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC} = (-x-z)\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$

$\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \det\left(y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}, (-x-z)\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}\right)$

$$= \begin{vmatrix} y & -x-z \\ z & z \end{vmatrix} \cdot \det(\vec{AB},\vec{AC})$$

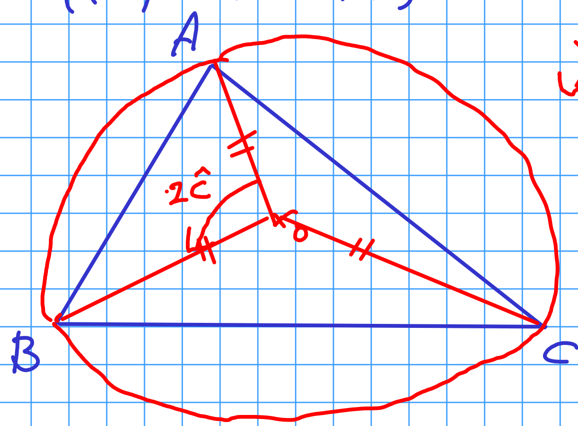
$$= (yz+xz+z^2)\ \det(\vec{AB},\vec{AC}) = z \det(\vec{AB},\vec{AC})$$

de même, $\det(\vec{MB},\vec{MC}) = x \det(\vec{AB},\vec{AC})$

$\det(\vec{MC},\vec{MA}) = y \det(\vec{AB},\vec{AC})$

donc $M = \mathrm{Bar}\left((A,\det(\vec{MB},\vec{MC})),(B,\det(\vec{MC},\vec{MA})),(C,\det(\vec{MA},\vec{MB}))\right)$.

Corollaire 1.



Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC

Alors $O = \mathrm{Bar}\left((A,\sin 2\hat{A}),(B,\sin 2\hat{B}),(C,\sin 2\hat{C})\right)$

Corollaire 2. (droite d'Euler)

$$\vec{OH} = 3\vec{OG} \qquad (\Rightarrow O, G, H \text{ alignés})$$

où $O = \mathrm{Bar}((A,\sin 2\hat{A}),(B,\sin 2\hat{B}),(C,\sin 2\hat{C}))$, $G = \mathrm{Bar}((A,1),(B,1),(C,1))$, $H = \mathrm{Bar}((A,\tan\hat{A}),(B,\tan\hat{B}),(C,\tan\hat{C}))$

centre du cercle circonscrit — centre de gravité — orthocentre

Exercice. Soient A, B, C affinement indépendants dans $\mathcal{E}$

($\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}$ indépendants)

Soient M_1, M_2, M_3 tq $M_i = \mathrm{Bar}((A,\alpha_i),(B,\beta_i),(C,\gamma_i))$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ tq $\forall i \ \ \alpha_i+\beta_i+\gamma_i \neq 0$

Montrer que M_1, M_2, M_3 alignés $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$

indication : alignés $\Leftrightarrow$ dét$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$

Or $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1} = (\beta_2-\beta_1)\overrightarrow{AB} + (\gamma_2-\gamma_1)\overrightarrow{AC}$

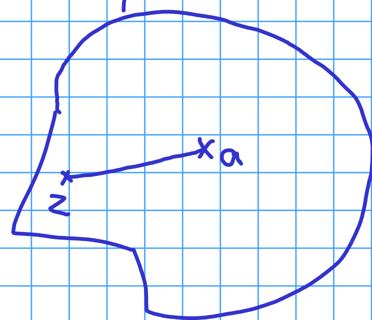
et si $\alpha_i+\beta_i+\gamma_i=1$ alors $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2-\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 \\ 0 & \beta_3-\beta_1 & \gamma_3-\gamma_1 \end{vmatrix}$.

Formules de Cauchy

Primitives

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe où Ω ouvert étoilé de $\mathbb{C}$

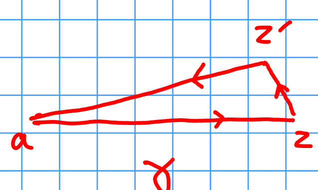
$(\exists a \in \Omega, \forall z \in \Omega, [a,z] \subset \Omega)$



Alors $F(z) = \int_{[a,z]} f$ est une primitive de f sur Ω

c-à-d : $F'(z) = f(z) \quad (\forall z \in \Omega)$

En effet : $\dfrac{F(z) - F(z')}{z - z'} = \dfrac{\int_{[a,z]} f - \int_{[a,z']} f}{z - z'}$



Théorème de Goursat

$$\Rightarrow \int_\gamma f = 0 = \int_{[a,z]} + \int_{[z,z']} - \int_{[a,z']}$$

$$\Rightarrow \frac{F(z) - F(z')}{z - z'} = \frac{\int_{[z',z]} f}{z - z'} \xrightarrow[z' \neq z]{z' \to z} f(z)$$

$$\frac{\int_{[z',z]} f}{z-z'} = \int_0^1 f(z' + t(z - z'))\, dt$$

$$\int_{[z',z]} f = (z - z') \int_0^1 f(z' + t(z - z'))\, dt$$

$\square$

Théorème. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert étoilé

Soit $\gamma \subset \Omega$ lacet

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe

Alors $\forall z \in \Omega \setminus \gamma$, $\quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) \cdot f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\, du$

démo. $\quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{du}{u-z}$

donc $\quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) - \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\, du = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \underbrace{\frac{f(z)-f(u)}{u-z}}_{\substack{\text{holomorphe sur } \Omega \setminus \{z\} \\ \text{continue sur } \Omega}} du$

$= 0$ (par Goursat généralisé)

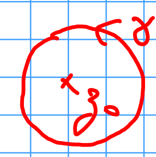
Applications

1) $\forall n \geq 0$, $\quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\, du$

2) Théorème de Liouville

Soit f entière sur $\mathbb{C}$ c-à-d holomorphe sur $\mathbb{C}$

Si f bornée alors f constante.



Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

<u>démo</u>. $\gamma(t) = re^{it} + z_0$, $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$ $\qquad |z|$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^2}\, du$$

$$|f'(z_0)| \leq r \frac{\|f\|_\infty}{r^2} = \frac{\|f\|_\infty}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

donc $f'(z_0)=0$ $\quad(\forall z_0\in\mathbb{C})$

donc f constante

3) Si $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant, alors P a une racine dans $\mathbb{C}$

(d'Alembert)

démo. Sinon, $z\mapsto \dfrac{1}{P(z)}$ est entière

or comme $\deg P > 1$, $\lim\limits_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P} \text{ bornée } \underset{\text{(Liouville)}}{\Rightarrow} \frac{1}{P} \text{ constante } \underline{\text{absurde}}$$

Analyticité des fonctions holomorphes

Théorème. Soit $z_0\in\mathbb{C}$. Soit $R>0$

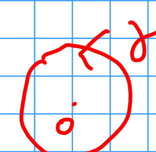
Alors si $f\in\mathcal{O}(D(z_0,R))$ (holomorphe sur $D(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<R\}$)

il existe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ série de rayon $\geq R$ tq

$$\boxed{\forall\ |z-z_0|<R,\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}$$

démo. (si $z_0=0$).

Soit $0<r<R$.



Soit $\gamma(t)= re^{it}$ $\quad 0\leq t\leq 2\pi$

(Cauchy) $\forall |z|<r$, $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} f(re^{it})}{re^{it}-z}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{1-\frac{z}{re^{it}}}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, r^{-k} e^{-ikt}\,dt\right)}_{a_{k,r}\in\mathbb{C}} z^k$$

$\forall |z|<r$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,r} z^k$

Or $a_{k,r} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k$ ne dépend pas de r (!)

$\forall |z|<r$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge, le rayon de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ est $\geq r$

vrai pour tout $0<r<R$ $\Rightarrow$ rayon $\geq R$.

Principe des zéros isolés

Lemme. Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$

Soit $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ si il existe $a\in\Omega$ tq $\forall n\geq 0$, $f^{(n)}(a)=0$

alors $f=0$ sur Ω.

Contre-exemple. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$.

—— . ——

démo du lemme.

Soit $a \in \Omega$ tel que $\forall n,\ f^{(n)}(a) = 0$

$\exists\, r > 0,\ D(a,r) \subset \Omega$

$\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon $\geq r$ tq $\forall |z-a| < r,\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$

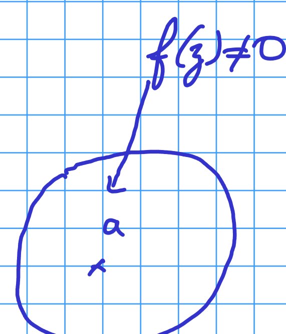
$$\Rightarrow \forall n,\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow \forall |z-a| < r,\ f(z) = 0$$

Donc $\Omega' := \{x \in \Omega : \forall n, f^{(n)}(x) = 0\}$ ouvert de Ω

Or $\Omega' =$ fermé $= \bigcap_{n \geq 0} \{x \in \Omega : f^{(n)}(x) = 0\}$

donc Ω' ouvert et fermé de Ω $\Rightarrow \Omega' = \emptyset$ ou $\underline{\underline{\Omega}}$



Théorème des zéros isolés

Soit Ω ouvert connexe. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $f \neq 0$ alors

$$\forall a \in \Omega,\ f(a) = 0 \Rightarrow \exists\, r > 0,\ \forall\, 0 < |z-a| < r,\ f(z) \neq 0$$

démo. Soit $R > 0$ tq $D(a,R) \subset \Omega$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ pour une série de rayon $\geq R$

$\forall n \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. $\quad f \neq 0 \Rightarrow \exists\, m$ minimal tq $a_m \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^m \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-a)^n}_{H(z)}$$

H holomorphe sur $D(a,R)$ et $H(a) = a_m \neq 0$

Par continuité de H, $\exists \quad 0 < r < R, \ \forall |x-a| < r, \ H(x) \neq 0$

$\Rightarrow \quad \forall 0 < |z-a| < r \ , \quad f(z) = (z-a)^m H(z) \neq 0 \ \square$

Calcul différentiel

Définition. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit V ouvert de $\mathbb{R}^n$

on dit que $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme

si f $\mathcal{C}^1$ sur U, f bijective et f^{-1} $\mathcal{C}^1$ sur V.

Théorème d'inversion locale

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1

Soit $a \in U$ tq $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme

Alors il existe $a \in U' \subset U$ ouvert et $f(a) \in V'$ ouvert tels que

$f : U' \to V'$ est un C^1 difféomorphisme.

Théorème d'inversion globale

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1, <u>injective</u>

tq $\forall a \in U$, $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isomorphisme

ALORS $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to f(U)$ C^1 difféomorphisme

Exemples a) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$M \longmapsto e^M$$

est un difféomorphisme local au voisinage de O

$$\left(D\exp(0) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad e^H - e^O = H + o(\|H\|) \right)$$

$$H \longmapsto H$$

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

mais NON global $\qquad e^{\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}} = I_2 = e^O$

b) $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ $\quad (= M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tM = M$ et $\forall 0 \neq x, {}^txMx > 0)$

$M \longmapsto e^M$

est un C^1 difféomorphisme.

(injective et $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $\quad D\exp(M) : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$H \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_k(H)}{k!}$

où $\ell_k(H) = \sum_{i=1}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}$)

Exercice 1. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit f définie sur U par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.

(feuille 6)

$f(x,y) = f(-x,-y)$ $\quad \forall (x,y)$ $\quad$ donc non injectif.

$$Df(x,y) = \operatorname{Jac} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x(x^2-y^2) & \partial_y(x^2-y^2) \\ \partial_x(2xy) & \partial_y(2xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$\det Df(x,y) = 4x^2 + 4y^2 > 0$ $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

donc difféomorphisme local

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa différentielle en tout point et vérifier qu'elle est inversible.
2. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$. Justifier que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f^{-1} est lipschitzienne (on travaillera avec la norme 1 de $\mathbb{R}^2$).
4. En déduire que f est difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Calculer $Df^{-1}(p)$ où $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

(feuille 6)

1) $\det Df(x,y) = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos y/2 \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\cos y/2$

$\det Df(x,y) \geq 1 - \frac{1}{4} > 0$

donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $Df(x,y)$ inversible

2) $f(x,y) = f(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y/2) - x = \sin\left(\frac{y'}{2}\right) - x' \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y = \sin\left(\frac{x'}{2}\right) - y' \end{cases}$

$\Longrightarrow \quad x - x' = \sin\left(y/2\right) - \sin\left(\frac{y'}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} |x-x'| \leq \frac{|y-y'|}{2} \\ \text{et } |y-y'| \leq \frac{|x-x'|}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |x-x'| \leq \frac{|x-x'|}{4}$

$\Rightarrow x = x'$ et $y = y'$

donc f injective.

donc $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ C^1 difféomorphisme et $f(\mathbb{R}^2)$ ouvert.

3) Soient $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (X,Y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{y}{2}\right) - x = X \\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y = Y \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -X + \sin(y/2) \\ \sin\left(\frac{-X + \sin(y/2)}{2}\right) - y = Y \end{cases}$

Il suffit de trouver y tq $\underbrace{\sin\left(\frac{-X + \sin(y/2)}{2}\right) - Y}_{H(y)} = y$

Possible par le théorème du point fixe :

$|H(y) - H(y')| \leq \frac{1}{4}|y - y'| \quad \ldots$

donc $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.