Géométrie
Feuille de TD 1

b) Soient $A=(1,2,-3)$, $B=(4,-5,-2)$ et $C=(3,-2,-3)$. Donner une équation du plan passant par ces trois points.

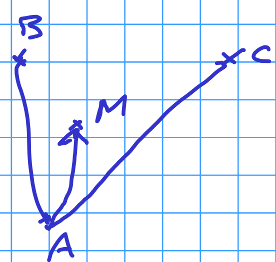
2° **Équation d'une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$**

Soit $A=(x_A,y_A)$ et $B=(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan. Montrer qu'un point $M=(x,y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0.$$

b) $P = \{ \underset{M}{\overset{\shortparallel}{(x,y,z)}} \in \mathbb{R}^3 : (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ lié dans } \mathbb{R}^3 \}$

$$M=(x,y,z) \in P \iff \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

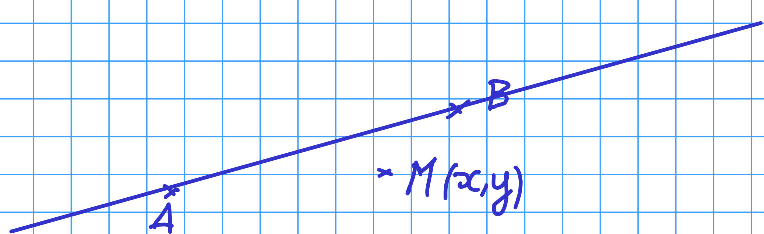


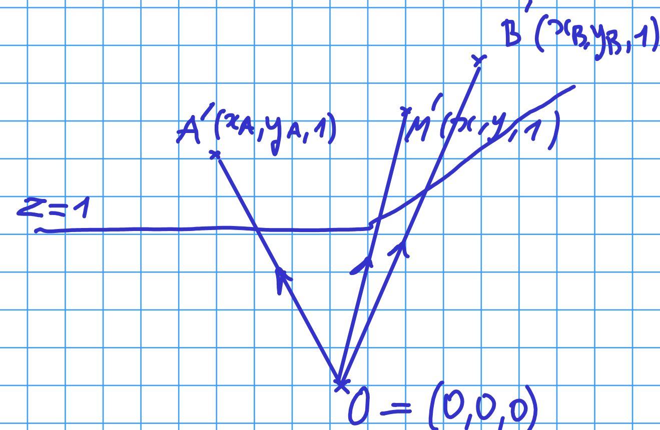
$$\iff 4(x-1)+2(y-2)+2(z+3)=0$$

$$\iff 4x+2y+2z-2=0$$

$$\iff \boxed{2x+y+z-1=0}$$

2°)





A, M, B alignés

$\iff \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB'}$ liés

$$\iff \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

III Présentation paramétrique et équation cartésienne

1° Soient a, b, c, d tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit D l'ensemble des points (x, y) défini par la condition :

$$(x, y) \in D \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = at + c \\ y = bt + d. \end{cases}$$

Quelle est la nature de D ? En donner une équation cartésienne.

2° Soient a, b, c trois réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Donner une présentation paramétrique de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

1°) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = at + c \\ y = bt + d \end{cases} \right\}$

si $a \neq 0$ $\begin{cases} x = at + c \\ y = bt + d \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{x - c}{a} \\ y = b\left(\frac{x - c}{a}\right) + d \end{cases}$

$(x,y) \in D \iff y = \frac{b}{a}x - \frac{bc}{a} + d \iff \boxed{ay - bx = ad - bc}$

De même si $b \neq 0$

2°) Réciproquement si $\mathcal{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0 \}$

Par exemple si $a \neq 0$ $\mathcal{D} = \left\{ \left(\frac{-c - by}{a}, y \right) : y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \left(\frac{-c}{a} - by, ay \right) : y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ -\frac{c}{a} - by - b\lambda, a(y + \lambda) : y \in \mathbb{R} \right\}$ $(\forall \lambda)$

Si $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$ $\mathcal{D} = \left\{ \left(x, -\frac{c}{b}\right) : x \in \mathbb{R} \right\}$

IV Incidence

1° **Deux droites dans le plan**

Soit deux droites D et D_2 d'équations[1] $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ et $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ dans le plan. L'annulation de quel déterminant caractérise-t-il le parallélisme de ces deux droites ?

2° **Trois droites dans le plan**

Ajoutons une troisième droite D_3 d'équation $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$. Montrer que D_1, D_2 et D_3 sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$D_i = (a_i x + b_i y + c_i = 0)$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$.

1ère étape

$\exists (x_0, y_0) \in D_1 \cap D_2 \cap D_3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \\ a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow \det A = 0.$

2^{e} étape si $D_1 // D_2 // D_3$

alors $\overrightarrow{D_1} = \{\overrightarrow{MN},\ M, N \in D_1\} = \overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{D_3}$

Or $\overrightarrow{D_1} = \mathbb{R}(-b_1, a_1) = (a_1 x + b_1 y = 0)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}(-b_1, a_1) = \mathbb{R}(-b_2, a_2) = \mathbb{R}(-b_3, a_3)$

$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -b_1 & a_1 \\ -b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b_2 & a_2 \\ -b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b_1 & a_1 \\ -b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - c_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$

$3^{ème}$ étape Réciproque.

Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ alors $\exists\ 0 \neq (x_0, y_0, z_0),\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 cas si $z_0 \neq 0$ alors $\forall i \quad a_i \dfrac{x_0}{z_0} + b_i \dfrac{y_0}{z_0} + c_i = 0$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x_0}{z_0}, \dfrac{y_0}{z_0}, 1\right) \in D_1 \cap D_2 \cap D_3$

si $z_0 = 0$ alors $a_1 x_0 + b_1 y_0 = a_2 x_0 + b_2 y_0 = a_3 x_0 + b_3 y_0 = 0$

$\Longrightarrow \overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3} \ // \ \mathbb{R}(-y_0, x_0)$ donc $D_1 // D_2 // D_3$.

car $\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ -y_0 & x_0 \end{vmatrix} = 0 \ (\forall i)$

Analyse complexe

Intégration complexe

1) intégrale le long d'un chemin

Définition Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue ($\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert)

Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux. (chemin)

$t \longmapsto \gamma(t)$

($\exists\ a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$,

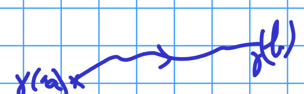
$\forall i\ \gamma$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a_i, a_{i+1}[$)

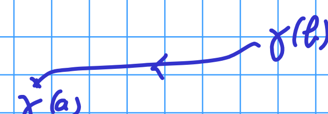
On note $\displaystyle \int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$

$\displaystyle \int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma f$

remarque si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, on note $\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{C}$

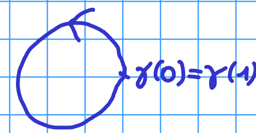
$t \longmapsto \gamma(a + b - t)$





alors $\int_{\gamma_-} f = -\int_\gamma f$

Exemple : $\gamma = C(0,1)$ c-à-d $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$\qquad t \longmapsto e^{it}$



$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \int_\gamma z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

En effet $$\int_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} i\, e^{int} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i\, e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} \underbrace{\left[\frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}\right]_0^{2\pi}}_{=0} & \text{si } n+1 \neq 0 \\ 2i\pi & \text{si } n+1 = 0 \end{cases}$$

Définition. Longueur de $\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L(\gamma)$

Remarque : $\forall f$, $\left|\int_\gamma f\right| \leq \sup_\gamma |f| \cdot L(\gamma)$.

2) Indice

définition. Un lacet est un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tq $\gamma(b) = \gamma(a)$

Par ex $C(0,1)$.

définition. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet.

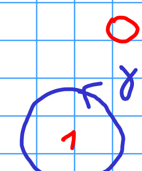
Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$

L'indice de z_0 par rapport à γ est $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$

Ex. $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$
$\qquad t \mapsto e^{it}$

$\forall\ |\alpha| < 1$, $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 1$

$\forall\ |\alpha| > 1$, $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$



En effet : $$\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \alpha} dt$$

Or $\frac{\gamma'}{\gamma - \alpha} = \frac{(\gamma - \alpha)'}{\gamma - \alpha}$ et : $\forall |\alpha| < 1$, $\gamma(t) - \alpha = e^{it} - \alpha = e^{it}(1 - \alpha e^{-it}) = e^{it + \operatorname{Log}(1 - \alpha e^{-it})}$

où $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ est la détermination principale du logarithme c-à-d : $\forall z = \rho e^{i\theta}$, $\operatorname{Log} z = \ln(\rho) + i\theta$ $\quad \forall \rho > 0, \forall -\pi < \theta < \pi$.

donc $\forall |\alpha|<1$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \left(it + \mathrm{Log}(1-\alpha e^{-it})\right)' dt$

$$= 2i\pi + \underbrace{\left[\mathrm{Log}(1-\alpha e^{-it})\right]_0^{2\pi}}_{=0}$$

$$= 2i\pi$$

De même, $\forall |\alpha|>1$, $\gamma(t)-\alpha = -\alpha\left(1-\frac{e^{it}}{\alpha}\right) = -\alpha e^{\mathrm{Log}\left(1-\frac{e^{it}}{\alpha}\right)}$

$$\Longrightarrow \frac{(\gamma(t)-\alpha)'}{\gamma(t)-\alpha} = \left(\mathrm{Log}\left(1-\frac{e^{it}}{\alpha}\right)\right)'$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{Log}\left(1-\frac{e^{it}}{\alpha}\right)\right)' dt = \left[\mathrm{Log}\left(1-\frac{e^{it}}{\alpha}\right)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Propriétés de l'indice

Proposition. 1) $\forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$

2) $z \longmapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus\gamma$

3) $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma$

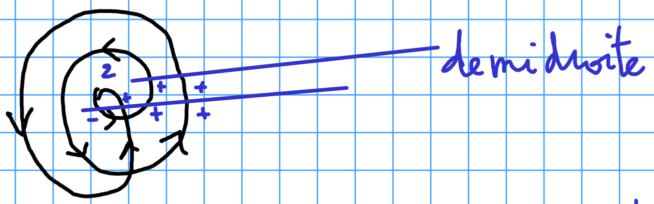
démo. 1)
on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt$

$$F'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z_0} \Longrightarrow \left(e^{-F(x)}(\gamma(x)-z_0)\right)' = 0$$

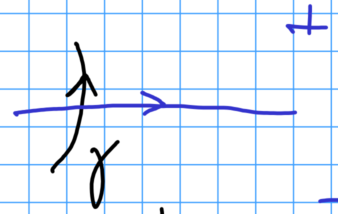
$$\Rightarrow e^{-F(b)}(\gamma(b)-z_0) = e^{-F(a)}(\gamma(a)-z_0) \Rightarrow e^{-F(b)} = e^{-F(a)} = 1$$

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'}{\gamma-z_0}}{\underset{\shortparallel}{F(b)}} \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

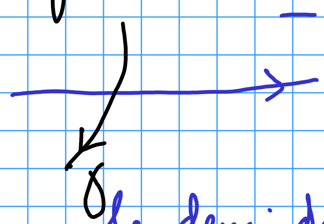
Remarque. $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ = « nombre de tours du lacet γ autour de z »
= nombre d'intersections de type + »
− nombre d'intersections de type « − » de
γ avec une demidroite issue de z.



intersection de type + :



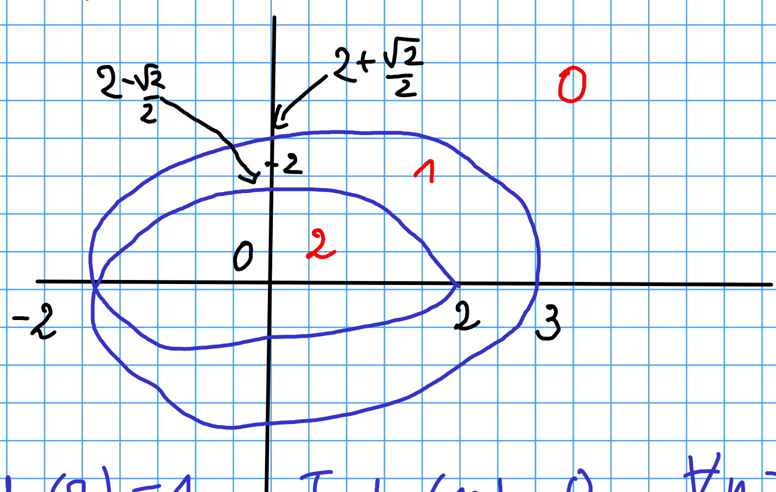
intersection de type − :



si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la demi droite,
si $\vec{\gamma}'(t_0)$ est la dérivée en l'intersection,
alors $+/-$ est le signe du $\det(\vec{u}, \overrightarrow{\gamma'(t_0)})$
(calculé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$)

Voici un exemple de calcul explicite de l'indice.

Soit $\gamma(t) = (2+\cos t)e^{2it}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$



$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 2$, $\mathrm{Ind}_\gamma(2) = 1$, $\mathrm{Ind}_\gamma(x) = 0$ $\quad \forall x > 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Calculons $\mathrm{Ind}_\gamma(2)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-2}\,dt = \,?$$

Si $0 \leq t \leq 2\pi$,

$$\gamma(t)-2 = (2+\cos t)e^{2it} - 2 = e^{2it}\left(2+\cos t - 2e^{-2it}\right)$$

Or, $\forall\, 0 \leq t \neq \pi \leq 2\pi$, $\quad 2+\cos t - 2e^{-2it} \notin \mathbb{R}_-$

donc $\forall\, t \neq \pi \quad \gamma(t)-2 = e^{2it}\, e^{\mathrm{Log}(2+\cos t - 2e^{-2it})}$

$$\Longrightarrow \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-2} = 2i + \left(\mathrm{Log}\left(2+\cos t - 2e^{-2it}\right)\right)'$$

Comme $\dfrac{\gamma'}{\gamma-2}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, on a :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'}{\gamma-2} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{\gamma'}{\gamma-2} + \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \frac{\gamma'}{\gamma-2}$$

Or, d'une part $\displaystyle\int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{\gamma'}{\gamma-2} = 2i(\pi-\varepsilon) + \left[\mathrm{Log}\left(2+\cos t - 2e^{-2it}\right)\right]_0^{\pi-\varepsilon}$

$$= 2i\pi - 2i\varepsilon + \mathrm{Log}\Big(\underbrace{2-\cos\varepsilon - 2e^{+2i\varepsilon}}_{= -1 - 4i\varepsilon + o(\varepsilon) = e^{-i\pi + \mathrm{Log}(1+4i\varepsilon + o(\varepsilon))}}\Big)$$

$= i\pi + o(1)$. De même, $\displaystyle\int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \frac{\gamma'}{\gamma-2} = i\pi + o(1)$.

donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'}{\gamma-2} = 2i\pi \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-2} = 1}$ □

3) Formules de Cauchy

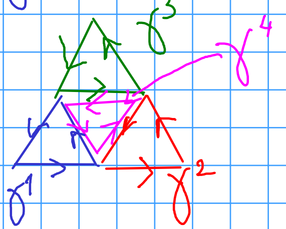
Théorème de Goursat

Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$, Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (holomorphe sur Ω)

$\forall\, \gamma \ \triangle \subset \Omega$, $\displaystyle\int_\gamma f = 0$

démo. Soit $I = \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f$

On découpe le triangle T dont γ est le bord en 4 triangles :



$$\exists \gamma^i, \quad \left|\int_{\gamma^i} f\right| \geq \frac{|I|}{4}$$

On construit par récurrence des triangles $T = T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \dots$

tq si $\gamma_i = \partial T_i$, $\left|\int_{\gamma_i} f\right| \geq \frac{|I|}{4^i}$

$$\left(\left|\int_{\gamma_i} f\right| \geq \frac{\left|\int_{\gamma_{i-1}} f\right|}{4} \right)$$

$$\exists z_0 \in \bigcap_{i=0}^{\infty} T_i$$

$$\forall_i, \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + o(z - z_0)$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon, \forall z \in T_i, \quad |f(z) - f(z_0) - (z-z_0) f'(z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \leq \varepsilon L(\gamma_i)$$

Or $\int_{\gamma_i} \left(f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)\right) dz = 0$

Remarque si $h = H'$, $\int_\gamma h = H(\gamma(b)) - H(\gamma(a))$ si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ lacet.

$$\text{donc } \left| \int_{\gamma_i} f \right| \leq \varepsilon L(\gamma_i) = \varepsilon \frac{L(\gamma)}{4^i}$$

$$\Rightarrow \frac{|I|}{4^i} \leq \left|\int_{\gamma_i} f\right| \leq \frac{\varepsilon L(\gamma)}{4^i} \Rightarrow |I| \leq \varepsilon L(\gamma) \quad \underline{\forall \varepsilon > 0}$$

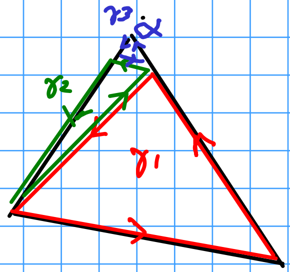
donc $\boxed{I = 0}$

<u>Généralisation</u>. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue

tq f holomorphe sur $\Omega \setminus \{\alpha\}$ pour un certain $\alpha \in \Omega$

alors $\forall \gamma$ △ $\subset \Omega$, $\int_\gamma f = 0$

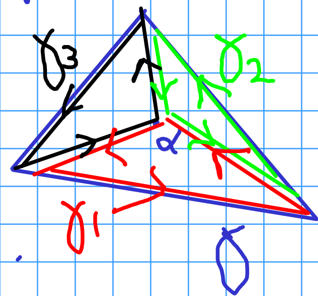
démo. Si α est un sommet du triangle γ



$$\int_\gamma = \underbrace{\int_{\gamma_1}}_{=0} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{=0} + \int_{\gamma_3} \Rightarrow \left|\int_\gamma\right| \leq \left|\int_{\gamma_3}\right| \xrightarrow[l(\gamma_3)\to 0]{} 0.$$

d'après le théorème de Goursat

Si α est à l'intérieur du triangle (ou sur un côté), on découpe le triangle en 3 (ou en 2) pour se ramener au cas précédent



$$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}$$
$= 0$ d'après le cas où α est un sommet. $\square$

CALCUL DIFFÉRENTIEL

1) Jacobienne

Soit $f : \underset{\text{ouvert}}{\Omega \subset \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$
$x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$

On suppose que $\forall i, \forall 1 \leq j \leq n$, $\partial_{x_j} f_i(a)$ existe en $a \in \Omega$

alors on note $J(f)(a) = \left(\partial_{x_j} f_i(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$

Si $m = 1$, $J(f)(a) = (\partial_{x_1} f(a), \dots, \partial_{x_n} f(a)) \in \mathbb{R}^n$

c'est le gradient de f noté $\nabla f(a)$.

Remarque. $J(f \circ g)(a) = J(f)_{(g(a))} \circ J(g)(a)$

2) Hessienne

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

On suppose que $\forall j$ $\partial_{x_j} f$ existe et est $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

(on dit que f est $\mathcal{C}^2$)

Alors :

Théorème de Schwarz $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, $\forall a \in \Omega$, $\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(a) = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f(a)$

Notation $\partial^2_{x_i x_j} f = \partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Contre-exemple

Exercice 3 feuille 5

Exercice 3. (Contre-exemple pour le théorème de Schwarz)
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \quad y^2 \sin(x/y) \text{ si } y \neq 0; \quad 0 \text{ sinon.}$$

1. f est-elle continue ? différentiable ?
2. Caculer les dérivées premières et secondes de f là où elles existent.
3. Pourquoi a-t-on exhibé un contre-exemple au théorème de Schwarz ?

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) f continue car si $y = 0$

$$|f(x,y) - f(x,0)| = |f(x,y)| = y^2 \left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq y^2 \xrightarrow[y \to 0]{} 0$$

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \text{si } y \neq 0 & y^2 \times \frac{1}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \text{si } y = 0 & 0 \end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \text{si } y \neq 0 & 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \text{si } y = 0 & \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y} = 0 \end{cases}$$

$\partial_x f$ continue sur $\mathbb{R}^2$

$\partial_y f$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \neq 0\}$

En particulier f différentiable en $(0,0)$.

2) $$\partial_y \partial_x f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{y \cos\left(\frac{x}{y}\right) - 0}{y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

En particulier $\partial_y \partial_x f(0,0) = 1$

$$\partial_x \partial_y f(x,y) = \begin{cases} \underbrace{2\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{si } y \neq 0}_{} = \cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ 0 \end{cases}$$

En particulier $\partial_x \partial_y f(0,0) = 0 \neq 1 = \partial_y \partial_x f(0,0)$.

Définition si f $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

On pose $\forall a \in \Omega$, $H_f(a) = \left(\partial^2_{x_i x_j} f(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Formule de Taylor. Si f $\mathcal{C}^2$ sur Ω si $a \in \Omega$, alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f(a) h_j + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial^2_{x_i x_j} f(a) h_i h_j}_{\geq 0} + o(\|h\|^2).$$

($\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in$ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$)

(resp. maximum local)

Corollaire 1) Si f $\mathcal{C}^2$ a un minimum local en $a \in \Omega$, alors $df(a) = 0$ ($\Leftrightarrow \forall j\ \partial_{x_j} f(a) = 0$)
et $Hf(a)$ est ≥ 0 (resp. ≤ 0)

2) Si $df(a) = 0$ et $Hf(a)$ définie positive, alors f a un minimum local.
(resp. négative) (resp. maximum local)

Rappel : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est ≥ 0 si
$\forall X \in M_{n1}(\mathbb{R})$, $\underbrace{{}^tXAX}_{\sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j} \geq 0$

A est définie positive si :
$\forall\, 0 \neq X \in M_{n1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$

Exemple :

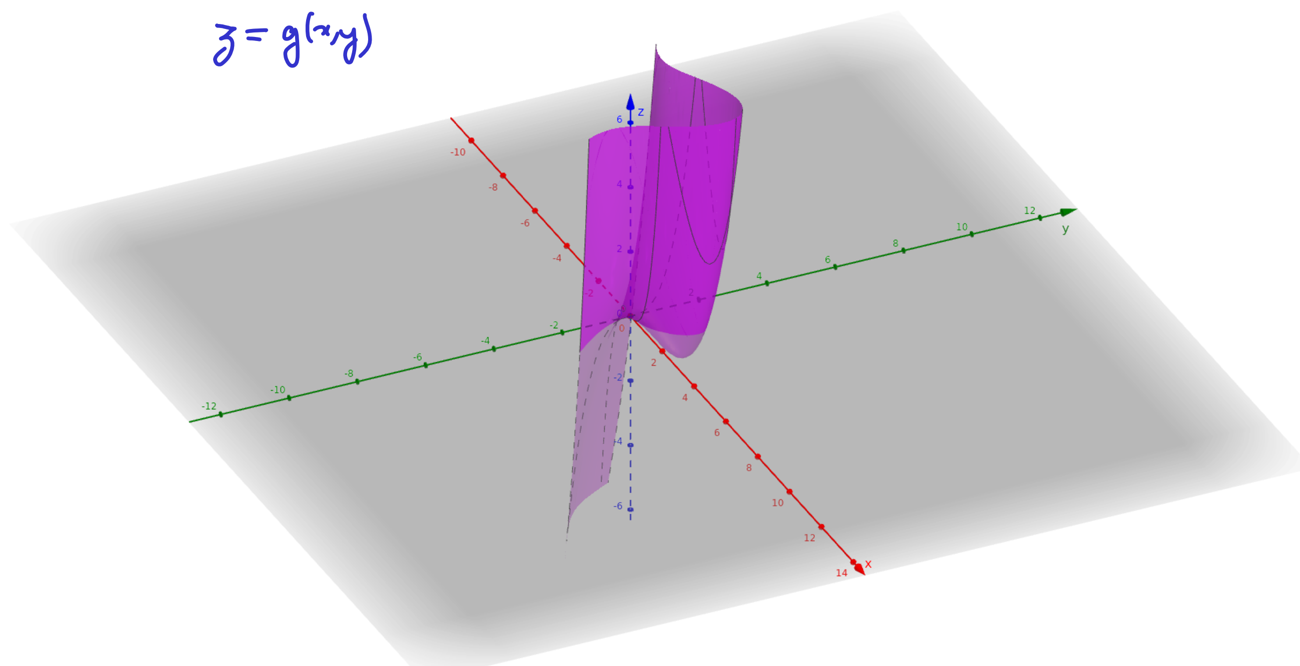
Exercice 2. Etudier sur $\mathbb{R}^2$ les extréma locaux et globaux des fonctions définies par :

1. $f(x,y) = x^4 - y^4$.
2. $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
3. $h(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
4. $k(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y$.

$$g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$\partial_x g = \partial_y g = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$$

$z = g(x,y)$



en $(0,0)$ $\quad g(0,0) = 0$

$g(x,0) = x^3$ peut être < 0 (si $x < 0$)

$g(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 = -1$

$$H_g(1,1) = \begin{pmatrix} \partial^2_{xx}g & \partial^2_{xy}g \\ \partial^2_{xy}g & \partial^2_{yy}g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$ définie positive en $x=y=1$

$\begin{pmatrix} \boxed{6} & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ définie positive car $6>0$ et $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36-9 = 27 > 0$.

donc minimum local non global car par exemple $g(x,0) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

__Rappel__ : __Critère de Sylvester__.

Une matrice symétrique $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est définie positive si et seulement si $\forall\, 1\le i\le n$, $\Delta_i(A) = \det(a_{\alpha\beta})_{1\le \alpha,\beta\le i} > 0$.